N· D'ORDRE 103

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

William BISMUTH
Attaché de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique

---

PREMIÈRE THÈSE

Etude du comportement des corps visco-élastiques par une méthode de phase

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 29 Mai 1962 devant la Commission d'examen

MM. P. ROUARD — *Président*
R. MERIGOUX, P. BOUSQUET — *Examinateurs*
G. CHAMPETIER, Th. VOGEL — *Invités*

N· D'ORDRE 103

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

William BISMUTH
Attaché de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

PREMIÈRE THÈSE

Etude du comportement des corps visco-élastiques par une méthode de phase

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 29 Mai 1962 devant la Commission d'examen

MM. P. ROUARD — *Président*
R. MERIGOUX, P. BOUSQUET — *Examinateurs*
G. CHAMPETIER, Th. VOGEL — *Invités*

FACULTÉ DES SCIENCES – UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Mort au Champ d'Honneur, M. F. MARTY
Maître de conférences de Mathématiques
(14 juin 1940)

DOYENS HONORAIRES

MM. MARCHAUD, TRAYNARD, CORROY, CHOUX.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. J. MARCHAUD, E. TRAYNARD, J. PERES, G. PETIT, R. THIRY, J. BOSLER, A. TIAN, L. MARGAILLAN, P. BENOIT, H. CABANNES, P. CHOUX.

DOYEN: M. P. ROUARD — ASSESSEUR: M. A GUILLEMONAT.

SECRETAIRE PRINCIPAL

M. C. MOYNAULT.

PROFESSEURS

MM.	G. CORROY	Géologie et minéralogie
	R. CERIGHELLI	Agronomie tropicale
	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	H. PRAT	Botanique
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. ABELOOS	Biologie générale
	R. MERIGOUX	Physique industrielle
	P. VINCENSINI	Calcul différentiel et intégral
	E. CALVET	Chimie générale
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	J. M. PERES	Océanographie biologique
	G. CARPENI	Chimie M. P. C.
	C. JAUSSERAN	Physique M. P. C.
	R. MOLINIER	Biologie végétale
	Y. DOUCET	Physique M. P. C.
	J. M. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	P. COTTON	Electronique

MM.	J. METZGER	Chimie S. P. C. N.
	J. TIMON-DAVID	Zoologie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	F. NAHON	Techniques mathématiques de la physique
	J. PAILLARD	Psycho-physiologie
	L. SAVIDAN	Chimie systématique
	D. KASTLER	Physique théorique
	P. BOUSQUET	Physique S. P. C. N.
	P. PESTEIL	Physique P. C. B.
	G. LIANDRAT	Physique (Institut de Nice)
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	L. ROYER	Minéralogie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	C. GOUVERNET	Géologie appliquée
	C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
	R. AMAR	Biologie animale P. C. B.
	A. JULG	Chimie théorique
	S. WACHS	Mathématiques générales (Institut de Nice)
	J. CHOUTEAU	Physiologie animale
	A. VISCONTI	Physique théorique
	J. LEFEBVRE	Chimie M. P. C.
	L. DEVEZE	Biologie marine
	S. TAXY (Mme)	Géologie historique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales
	P. BOUGHON	Mathématiques M. P. C.

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	M. L. FURNSTIN (Mme)	Biologie animale
	M. BERTRAND	Chimie S. P. C. N.
	J. TROMPETTE	Physique S. P. C. N.
	R. MONIER	Chimie biologique
	M. LAFFITTE	Chimie M. P. C.
	L. SIDERIADES	Dynamique des vibrations
	J. MANDELBROJT	Physique nucléaire
	F. BOREL	Mathématiques
	M. DUSSARDIER	Physiologie animale
	J. BLANC	Géologie marine
	R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
	A. BOURDILLON	Biologie animale
	A. ARAGNOL	Mathématiques
	B. GOUZON	Chimie
	R. PHILIP	Physique
	M. BIZOUARD	Physique

MM.	H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
	C. YTHIER	Chimie (Nice)
	S. BAUDOIN (Mme)	Mathématiques (Nice)
	J. RICARD	Botanique
	H. MOREL	Mathématiques

CHARGES DE CONFERENCES

MM.	J. MORIN	Neurophysiologie
	H. GAVINI (Mlle)	Psycho-physiologie
	P. JEAN	Physique
	J. SENEZ	Chimie biologique
	M. COTTON (Mme)	Mathématiques
	H. GASTAUD	Neurophysiologie
	A. BEZAGUET	Chimie
	S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
	L. COHEN-SOLAL	Physique (Nice)
	R. MOLINIER (Roger)	Biologie végétale
	D. SCHACHTER (Mme)	Ecologie terrestre et limnique
	L. GAFFIER	Botanique
	L. LAGARDE (Mlle)	Chimie générale
	F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie.

A mon Maître, Monsieur Th. Vogel

en témoignage de mon profond respect et de ma vive gratitude.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547003_0017

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué au Laboratoire d'Acoustique du Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille.

Nous ne saurions l'exposer sans exprimer à M. Th. Vogel, Directeur du C. R. S. I. M. , notre profonde reconnaissance pour ses précieux conseils, et l'aide fructueuse qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de notre carrière de chercheur.

Nous remercions M. F. Canac, Directeur Honoraire du C. R. S. I. M. qui fut notre parrain de recherche, et nous a accueilli avec une si grande bienveillance dans ses laboratoires.

Toute notre reconnaissance va aussi au personnel technique et administratif dont le dévouement et l'application ont permis à ce travail d'être mené à bien.

Nous remercions bien vivement:

Monsieur le Doyen P. Rouard;

Messieurs les Professeurs:

P. Mérigoux,
P. Bousquet

et Monsieur Th. Vogel, Directeur Scientifique

qui ont bien voulu composer le Jury.

M. Georges Champetier, Membre de l'Institut, qui s'est intéressé à notre travail dès le début, nous a fait le grand honneur de se joindre au Jury; nous lui en exprimons notre respectueuse reconnaissance.

INTRODUCTION

1. - OBJET DE CE TRAVAIL.

La Mécanique des solides déformables a eu longtemps pour seul objet l'étude des propriétés des corps élastiques, c'est à dire des matériaux dont la déformation était reliée à leur contrainte par une relation univoque. Or, notamment depuis la découverte des hauts polymères d'une part, et, d'autre part, au fur et à mesure que les techniques d'investigations devenaient plus précises, on s'est aperçu que presque tous les matériaux étudiés jusqu'alors n'étaient élastiques qu'en première approximation. En réalité des comportements de nature profondément différents peuvent être observés, soit que l'on pousse suffisamment loin l'analyse des observations dans le domaine primitivement considéré comme élastique, soit que l'on sorte de ce domaine en augmentant les contraintes.

En particulier on peut rencontrer les phénomènes suivants:

1°) la contrainte une fois supprimée, il subsiste une déformation permanente (plasticité).

2°) pour maintenir une déformation constante, il faut exercer une contrainte qui soit une fonction décroissante du temps (relaxation).

3°) la contrainte restant invariable au cours du temps, la déformation croît (fluage). Ce phénomène est très apparent pour de hauts polymères, mais il s'observe avec une intensité réduite même sur des corps que l'on pourrait croire typiquement élastiques, tels que l'acier.

Les corps qui présentent simultanément les phénomènes de fluage et de relaxation sont dits visco-élastiques; on reconnaît en effet un fluage dans le comportement des fluides visqueux, où la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation.

Il est bien évident que les comportements non élastiques dont il vient d'être question n'ont rien de commun avec les phénomènes d'élasticité non-linéaire, où déformation et contrainte sont liées par une correspondance biunivoque, mais non linéaire; les comportements viscoélastiques peuvent eux aussi être linéaires ou non linéaires.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement des corps visco-élastiques linéaires par une méthode de vibrations entretenues, les observables étant ici la vitesse de propagation et l'amortissement d'ondes progressives de fréquence sonore à travers ces matériaux.

En dehors de la précision de la technique expérimentale que nous décrirons plus loin, le choix de cette méthode a permis d'étudier les corps visco-élastiques dans le domaine où leur comportement est linéaire, en les soumettant uniquement à une très petite contrainte sinusoïdale.

Nous commencerons par donner une théorie d'ensemble qui permettra de rendre compte qualitativement du comportement de ces corps.

2. - EQUATION D'ETAT DES CORPS VISCO-ELASTIQUES LINEAIRES.

Il résulte de ce qui a été dit que la "relation d'état" d'un corps visco-élastique fait intervenir trois arguments, la contrainte, la déformation, et le temps. Elle est donc de la forme

$$f(\sigma, \varepsilon, t) = 0 \qquad (1)$$

où f est un opérateur qu'en l'absence de phénomènes héréditaires tels que l'hystérésis on pourra supposer différentiel, c'est à dire qu'il pourra contenir les dérivées temporelles successives des deux variables dont on étudie la variation dans le temps. Dans le domaine du comportement linéaire, cet opérateur sera linéaire, de sorte que la relation d'état pourra s'écrire

$$(2) \qquad f(\sigma, \varepsilon, t) = \sum_{0}^{n} \left(A_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} + B_i \frac{d^i \varepsilon}{dt^i} \right) + C = 0$$

C sera en général nul, les propriétés des corps étant supposées les mêmes à toutes époques d'observation.

Cette relation comprend bien, comme cas particulier, celle des corps élastiques:

$$(3) \qquad \begin{gathered} A_0 \neq 0; \quad B_0 \neq 0; \quad A_i = B_i = 0 \quad \text{pour } i > 0; \quad C=0 \\ A_0 \sigma + B_0 \varepsilon = 0 \end{gathered}$$

La notation usuelle étant $\sigma = E\varepsilon$, on a l'expression du module d'Young:

$$E = -\frac{B_0}{A_0}$$

On doit donc s'attendre à ce que A_0 et B_0 soient de signes contraires pour tout corps qui manifeste dans certaines circonstances les propriétés d'un corps purement élastique.

Un corps qui suit la loi (3) pourra être représenté par un "modèle" constitué par un ressort linéaire de raideur R = E; les résultats de toute expérience faite sur un tel ressort peuvent être transposés de manière à prédire le comportement du corps représenté.

De même (2) représentera le comportement d'un corps visqueux au sens de la mécanique des fluides si l'on fait:

$$A_0 \neq 0 \; ; \quad B_0 = 0 \; ; \quad B_1 \neq 0 \; ; \quad A_i = 0 \; (i > 0); \; B_i = 0 \; (i > 1)$$

d'où la loi:

$$(4) \qquad A_0 \sigma + B_1 \dot{\varepsilon} = 0$$

Le coefficient de viscosité usuellement dénoté η est ici $-\frac{B_1}{A_0}$

Le "modèle mécanique" d'un tel corps est un "dashpot" amortisseur, constitué par un piston pouvant se déplacer dans un liquide de viscosité η.

Revenons à la loi linéaire générale (2): il est certain que, toutes les fois qu'elle est valable, les fonctions $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$ jouiront des propriétés qui permettent de leur appliquer la transformation de Laplace.

Si l'on pose:

$$\bar{\sigma}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\sigma(t)\,dt \quad ; \qquad \bar{\varepsilon}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\varepsilon(t)\,dt$$

avec p complexe en général, la transformée de (2) sera:

$$Q(p)\,\bar{\sigma}(p) + P(p)\,\bar{\varepsilon}(p) = 0\,,$$

où P et Q sont deux polynomes, soit encore

$$\bar{\sigma} = \bar{E}(p)\,\bar{\varepsilon} \tag{5}$$

la fonction rationnelle de p

$$\bar{E}(p) = -\frac{P}{Q} = -\frac{\sum_0^n B_i\,p^i}{\sum_0^n A_i\,p^i} = \frac{1}{\bar{J}(p)} \tag{6}$$

qui intervient dans (5) d'une façon formellement semblable à celle dont le module d'Young intervient dans la loi de Hooke, peut être nommée "module dynamique d'Young".

Si $\bar{E}(p)$ possède un original $E(t) = \mathcal{L}^{-1}\bar{E}(p)$ acceptable, la relation entre les originaux de (5) sera:

$$\sigma(t) = E(t) * \varepsilon(t) = \int_0^\infty E(u)\,\varepsilon(t-u)\,du \tag{5'}$$

On remarquera que E(t) ne sera une fonction que si le degré de P est inférieur à celui de Q; si les degrés des deux polynomes sont égaux ($A_n B_n \neq 0$), l'un des termes de E(t) sera une mesure de Dirac, $-\frac{B_n}{A_n}\delta(t)$ d'où

$$\sigma(t) = -\frac{B_n}{A_n}\,\varepsilon(t) + \ldots\ldots$$

de sorte qu'il se manifestera tout d'abord une sorte d'élasticité dynamique avec un module d'Young $-\frac{B_n}{A_n}$, à quoi se superposera un comportement non élastique.

Si le degré de P est supérieur à celui de Q, on écrira

$$\bar{J}(p)\;\bar{\sigma}(p) = \bar{\varepsilon}(p) \tag{5'}$$

avec $\overline{J} = -\frac{Q}{P}$ "module de complaisance dynamique" et les originaux seront liés par la loi:

$$\varepsilon(t) = \overline{J}(t) \ * \ \sigma(t) = \int_0^\infty J(u)\,\sigma(t-u)\,du$$

Dans la théorie des corps élastiques, l'ordre le plus élevé des dérivées temporelles de σ ou ε qui interviennent dans l'expression de grandeur ayant une interprétation physique (moment fléchissant, effort tranchant,....) est n = 2. Sans prétendre que les lois du type (2) avec $n > 2$ soient invraisemblables, nous bornerons notre étude aux corps visco-élastiques dont l'équation d'état ne contient pas de termes d'ordres supérieurs. Nous supposerons également que l'effet élastique soit toujours présent, ce qui permet de postuler $A_o \neq 0$ et de diviser tous les termes par ce coefficient. Les corps de cette catégorie sont donc caractérisés par cinq paramètres au plus,

$$\frac{A_2}{A_o}\ ,\ \frac{A_1}{A_o}\ ,\ \frac{B_2}{A_o}\ ,\ \frac{B_1}{A_o} \qquad \text{et} \qquad \frac{B_o}{A_o}$$

On a

$$(7) \qquad \overline{E}(p) = \frac{1}{\overline{J}(p)} = -\frac{B_2 p^2 + B_1 p + B_o}{A_2 p^2 + A_1 p + A_o}$$

Il n'est pas inutile de vérifier directement que le module dynamique (7) représente bien un corps visco-élastique: revenons à l'équation différentielle d'état, qui est ici

$$A_2\sigma'' + A_1\sigma' + A_o\sigma = -\left(B_2\varepsilon'' + B_1\varepsilon' + B_o\varepsilon\right);$$

si l'on veut maintenir ε constante, soit ε_o, la contrainte est solution de

$$A_2\sigma'' + A_1\sigma' + A_o\sigma = -B_o\varepsilon_o\ ;$$

soient $\frac{1}{\tau}$ et $\frac{1}{\tau'}$, les racines de l'équation caractéristique; la solution de notre équation différentielle qui prend les valeurs initiales: $\sigma(o) = \sigma_o$ et $\sigma'(o) = \sigma_o' = 0$ est

$$\sigma = \frac{\sigma_o' - \frac{B_o\varepsilon_o}{A_o}}{\tau' - \tau}\left[\tau' e^{-t/\tau'} - \tau e^{-t/\tau}\right] - \frac{B_o\varepsilon_o}{A_o}$$

Lorsque t croît σ décroît de façon monotone depuis sa valeur initiale σ_0 jusqu'à $\sigma_\infty = -\frac{B_0 \varepsilon_0}{A_0}$; il y a bien relaxation, et l'allure de celle-ci est caractérisée par les deux "temps de relaxation" τ et τ' (le phénomène est évidemment plus simple si $A_2 = 0$, car alors il n'y a qu'un seul temps de relaxation, dont l'inverse est le décrément de σ).

De même, si l'on maintient σ constante, on obtient une équation analogue en ε ,

$$B_2 \varepsilon'' + B_1 \varepsilon' + B_0 \varepsilon = -A_0 \sigma_0$$

et les conclusions subsistent. Comme $-\frac{B_0}{A_0}$ est le module (essentiellement positif) qui caractérise l'effet élastique, A_0 est de signe contraire à B_0. La déformation croît donc avec le temps; il y a bien fluage.

3. - MODELES MECANIQUES.

Les expressions (6), ou (7) lorsqu'on fait l'hypothèse n = 2, suffisent à déterminer entièrement le comportement des corps visco - élastiques dans le domaine linéaire, quelles que soient les conditions ou sollicitations auxquelles ils sont soumis. Nous examinerons un peu plus loin les possibilités de détermination expérimentale des coefficients qui y figurent.

Toutefois, les auteurs qui ont traité de la rhéologie ayant tous attaché une grande importance à la question des "modèles mécaniques", et une certaine confusion paraissant y régner, nous allons en dire d'abord quelques mots, encore que nous ne lui portions pas beaucoup d'intérêt, pour les raisons qui apparaîtront.

On a vu précédemment (équations (3) et (4)) que les équations les plus simples du type (6) sont celles qui décrivent le comportement de corps élastiques d'une part, tels que des ressorts, et visqueux d'autre part, tels que les amortisseurs à dashpot: pour le ressort, $\overline{J} = 1/R$ avec R= const; pour l'amortisseur, $\overline{J} = 1/\eta p$ avec η=const. Avec ces deux éléments, on peut faire des montages à connexions en série et à connexions en parallèle où les complaisances $\overline{J}$ résultantes suivent les mêmes lois que pour les montages d'impédances ($\overline{J}$ n'est rien d'autre qu'une impédance au sens large, rapport d'une grandeur "effet" à une grandeur "cause".

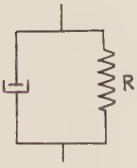
Ainsi, un ressort et un amortisseur en série donnent

(8)

$$\overline{J} = \frac{1}{\overline{E}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\eta p}$$

Un ressort et un amortisseur en parallèle donnent

(9)



$$\overline{E} = R + \eta p \; ; \quad \overline{J} = \frac{1}{R+\eta p} = \frac{1/\eta}{p+R/\eta}$$

et ainsi de suite.

L'usage de $\overline{J}$ se révèle comme le plus commode, le degré de son numérateur étant au plus égal à celui de son dénominateur; nous retrouvons cette propriété dans les montages plus compliqués, et raisonnerons désormais sur $\overline{J}$ plutôt que sur $\overline{E}$.

En combinant un nombre plus grand de ressorts et d'amortisseurs, on pourra obtenir des expressions de $\overline{J}$ qui seront toujours des fonctions rationnelles de p. De fait, deux montages sont possibles entre cellules: la connexion en série (que nous dénoterons par $\oplus$) et la connexion en parallèle, à laquelle nous attribuerons le symbole $/\!/$. Si j_1 et j_2 sont deux modèles de complaisances dynamiques respectives

$$\overline{J}_1(p) = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} \quad \text{et} \quad \overline{J}_2(p) = \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} \quad , \text{ on aura:}$$

pour le modèle $j = j_1 \oplus j_2$: $\overline{J} = \overline{J}_1 + \overline{J}_2 = \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{P_1 P_2}$

et pour le modèle $j = j_1 /\!/ j_2$: $\overline{J} = \dfrac{\overline{J}_1 \overline{J}_2}{\overline{J}_1 + \overline{J}_2} = \dfrac{Q_1 Q_2}{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}$

Un modèle C_3 a trois éléments résultera de la combinaison d'une cellule C_2 à deux éléments avec un élément simple C_1; soit, puisque $C_2 = C_1 \oplus C_1'$ ou $C_1 /\!/ C_1'$, les quatre possibilités distinctes:

$$(C_1 /\!/ C_1') \oplus C_1'' : \quad \bar{J} = \frac{1}{R+\eta p} + \frac{1}{R'}$$

$$\text{ou} \qquad \bar{J} = \frac{1}{R+\eta p} + \frac{1}{\eta' p}$$

$$(C_1 \oplus C_1') /\!/ C_1'' : \quad \frac{1}{\bar{J}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\eta p}} + R'$$

$$\text{ou} \qquad \frac{1}{\bar{J}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\eta p}} + \eta' p$$

Dans les quatre cas, on a:

$$\bar{J} = \frac{1}{r} + \frac{a_1}{p + b_1} + \frac{a_2}{p + b_2} \qquad (*)$$

les a_i, b_i étant non-négatifs, mais éventuellement nuls, et r positif, éventuellement infinis.

Toute combinaison ultérieure s'obtiendra de façon analogue, soit $C_4 = C_3 \oplus C_1$, ou $C_3 /\!/ C_1$, ou $C_2 \oplus C_2$, ou $C_2 /\!/ C_2$, et ainsi de suite. Toute combinaison de cette sorte, quel que soit le nombre de ses éléments, donnera donc une complaisance dynamique de la forme:

(*) On observera que deux C_1 de même nature, en série ou en parallèle, ne donnent pas naissance à une cellule nouvelle. Ainsi, par exemple $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$ peut toujours s'écrire $\frac{1}{r}$, de la même forme que les composantes.

$$(10) \qquad \overline{J} = \frac{1}{r} + \sum \frac{a_i}{p + b_i}$$

On reconnaît la décomposition en fractions élémentaires d'une fonction rationnelle $\frac{Q(p)}{P(p)}$, où dg Q $\leqslant$ dg P, et où P n'a que des zéros réels et simples. Au reste, le degré des polynomes est au plus égal au nombre d'amortisseurs contenus dans le modèle.

Inversement, si l'on se donne une fonction rationnelle $\overline{J}(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$, elle pourra être la complaisance dynamique d'un modèle à ressorts et amortisseurs seulement si sa décomposition en fractions élémentaires est de la forme (10), soit si P n'a que des zéros p_i simples et réels, et si de plus les expressions $\frac{Q(p_i)}{P'(p_i)}$ sont non-négatives, ces expressions représentant les valeurs de a_i de (10).

On voit que la représentation par combinaisons de ressorts et d'amortisseurs ne s'applique qu'à des équations d'état dont les coefficients remplissent certaines conditions. Il faut noter que ce résultat subsiste quel que soit le degré de la fraction rationnelle en p, quel que soit donc le nombre de termes de la décomposition, et, en particulier, qu'il reste valable lorsque la chaîne est composée d'un nombre infini de cellules infiniment semblables de leurs voisines. Ce modèle "continu" qui a été proposé par divers auteurs n'ajoute donc rien d'essentiel à la généralité de la représentation; on retiendra notamment que si:

$$\overline{J}(p) = \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{x + p}$$

est la complaisance dynamique d'un modèle continu, il ne pourra représenter que des fonctions $\overline{J}$ dont les poles sont situés sur la partie négative de l'axe réel.

Le recours aux "modèles rhéologiques" satisfait un certain goût de l'image simple, et n'est pas sans vertu didactique. Il n'a pas la valeur des analogies électromécaniques, qui permettent une expérimentation plus facile sur des agencements régis par les mêmes équations que celles du système que l'on étudie: ici, en effet, nous ne connaissons l'équation d'état qu'après avoir tiré les conclusions de l'expérimentation directe, de sorte que le modèle ne peut être construit, lorsque les circonstances sont favorables, que lorsque sa principale utilité a disparu. D'autre part, le modèle rhéologique n'est acceptable que s'il représente le comportement du corps pour tout régime, ou au moins pour tout régime établi ($p = i\omega$) ; proposer des modèles différents pour un même corps, sous différents régimes, ne nous semble d'aucune utilité.

REMARQUE.

Beaucoup d'auteurs se contentent de considérer le module dynamique en régime harmonique, c'est à dire en faisant $p = i\omega$, ω pulsation de l'excitation. Rappelons que les notations suivantes sont alors assez répandues:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + i\bar{E}_2 = \left|\bar{E}\right| e^{i\delta}$$

$$\bar{E}_1 = p.r.\bar{E}\,;\ \bar{E}_2 = p.i.\bar{E}\,;\qquad \delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1} \quad \text{"angle de pertes".}$$

$$\bar{J} = \bar{J}_1 - i\bar{J}_2$$

L'intérêt consiste ici dans la possibilité de détermination expérimentale des coefficients A_i, B_i. C'est cette possibilité que nous allons maintenant envisager, en choisissant pour moyen d'investigation l'observation de la propagation d'un ébranlement de pulsation imposée.

4. - PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN CORPS VISCO-ELASTIQUE.

En procédant à la détermination des coefficients de (2), il faut d'abord être assuré de ne pas sortir du domaine linéaire: le plus simple, à cet effet, est certainement d'exciter en une région du corps de faibles oscillations harmoniques, et d'étudier la propagation de l'ébranlement ainsi provoqué. Il suffira de superposer deux forces excitatrices de fréquences différentes, pour s'apercevoir d'un effet non linéaire éventuel par l'apparition de réponses d'autres fréquences; en général, cet effet disparaîtra lorsque l'amplitude des excitations aura été convenablement réduite, et l'on sera alors assuré que la loi linéaire du type (2) est valable.

Considérons par exemple un long barreau de petite section, découpé dans le corps à étudier, et supposons qu'on sache y exciter une onde longitudinale: à chaque instant t, le point matériel qui avait pour abscisse non troublée x subira un déplacement tel que son abscisse deviendra : $x + u(x,t)$. De ce fait, le corps subira au point considéré une déformation

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$$

et il en résultera une contrainte σ telle que

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \qquad \rho$$

étant la densité du corps.

En prenant les transformées, pour p = iω, il vient,

$$\bar{\varepsilon} = \partial_x \bar{u} \; ; \quad \partial_x \bar{\sigma} = -\rho\omega^2 \bar{u}$$

et puisque

$$\bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon}$$

$$-\rho\omega^2 \bar{u} = \bar{E}\,\partial_{xx}\bar{u}$$

ou encore

$$\partial_{xx}\bar{u} + \mu^2 \bar{u} = 0 \quad ; \quad \mu = -\frac{\rho\omega^2}{\bar{E}(i\omega)}$$

Lorsque la propagation se fait sans réflexion (barreau très long),

$$\bar{u} = \bar{u}_o\, e^{\mu x}$$

et

$$u = u_o e^{\mu x + i\omega t} = u_o e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

de sorte que

$$\mu^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\,\frac{2\alpha\omega}{c} = \xi + i\eta$$

On constate que α^2 et $-\frac{\omega^2}{c^2}$ sont respectivement les racines positives ou négatives de l'équation

$$u^2 - \xi u - \frac{1}{4}\eta^2 = 0$$

dont le discriminant $\xi^2 + \eta^2$ est toujours réel.

Remplaçons $\bar{E}$ par son expression (7), en faisant p = iω:

$$\frac{\rho\omega^2\left(-A_2\omega^2 + iA_1\omega + A_o\right)}{-B_2\omega^2 + iB_1\omega + B_o} = \xi + i\eta$$

Lorsque ω est très petit, il suffit de considérer les termes de plus bas degré:

$$\xi + i\eta \sim \rho\omega^2\,\frac{1 + iA_1\omega}{B_o + iB_1\omega} \sim \frac{\rho\omega^2}{B_o^2}\left[B_o + i\left(A_1B_o - B_1\right)\omega\right]$$

η est donc de l'ordre de ω^3, très inférieur à $|\xi|$ qui est de l'ordre de ω^2. Les racines de l'équation en U sont donc sensiblement:

$$\frac{1}{2}\left[\xi \pm |\xi|\left(1+\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\xi^2}\right)\right]$$

soit $\alpha \sim \frac{A_1 B_0 - B_1}{2 B_0 \sqrt{\rho}}\omega^2$ et $c^2 \sim -\frac{B_0}{\rho}$ c'est à dire la valeur qu'aurait la vitesse de propagation si le corps était purement élastique.

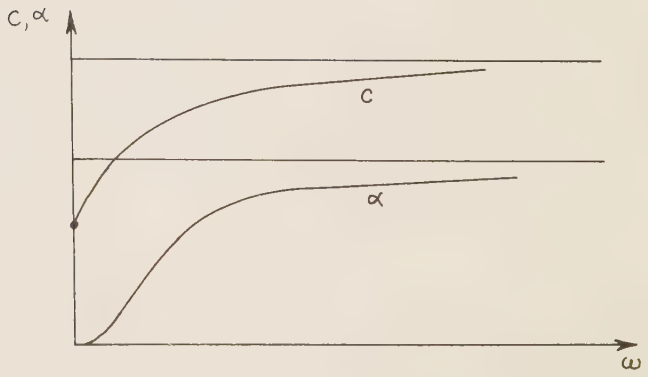
Au contraire, lorsque ω est très grand, il suffit de considérer les termes de plus haut degré:

$$\xi + i\eta \sim \rho\omega^2 \frac{-A_2\omega + iA_1}{-B_2\omega + iB_1} \sim \frac{\rho}{B_2^2}\left[A_2 B_2 \omega^2 + i\left(A_2 B_1 - B_2\right)\omega\right]$$

ici encore $\eta = o(\omega) \ll |\xi| = o(\omega^2)$ de sorte que $\frac{\omega^2}{c^2} \sim -\xi$

$$\alpha^2 \sim \frac{\eta^2}{4|\xi|^2}$$

$$\begin{cases} c^2 \sim -\dfrac{B_2}{\rho A_2} \\ \alpha^2 \sim -\dfrac{\rho(A_2 B_1 - B_1)^2}{4 A_2 B_2} \end{cases}$$

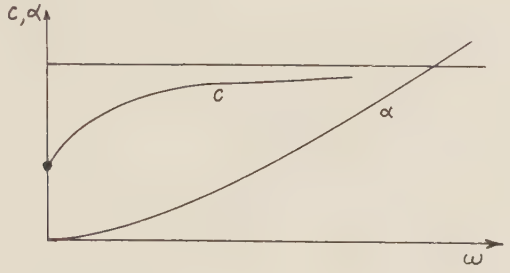


Variation de α, c en fonction de ω

Toutefois, le comportement aux fréquences élevées peut être différent si les coefficients A_2 ou B_2 sont nuls:

1°) Si $B_2 = 0$ $\quad \xi + i\eta \sim \frac{\rho}{B_1^2}\left[\left(A_2 B_0 - A_1 B_1\right) - i B_1 A_2\right]\omega^2$

ξ et η sont du même ordre de grandeur, $0(\omega^2)$. On a donc $\alpha^2 = 0(\omega^2)$ et $\frac{\omega^2}{c^2} = 0(\omega^2)$, c'est à dire que C^2 tend vers une valeur constante:

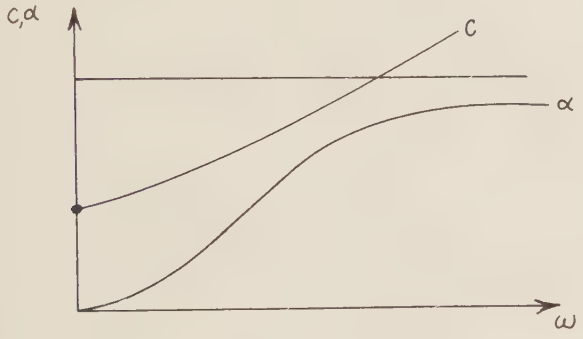


Variation de c, α en fonction de ω pour $B_2 = 0$

2°) si $A_2 = 0$, $B_2 \neq 0$,

$$\xi + i\eta \sim \frac{\rho}{B_2^2}\left[A_1 B_1 - B_2 - i A_1 B_2\right]$$

ici encore, ξ et η sont du même ordre, $0(1)$. On a donc $\alpha^2 \sim$ constant, et $\frac{\omega^2}{c^2} \sim$ constant, soit $C^2 \sim 0(\omega^2)$



Variation de c, α en fonction de ω pour $A_2 = 0$

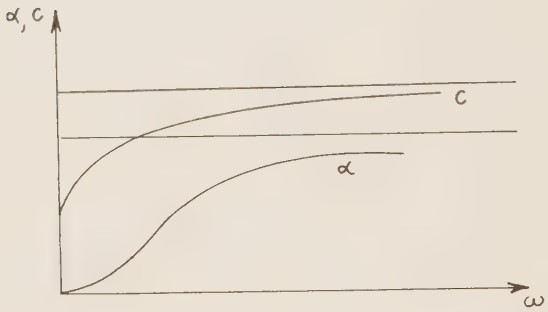
3°) Si A_2 et B_2 sont nuls tous deux:

$$\xi + i\,\eta \sim \frac{\rho}{B_1^2}\left[A_1 B_1 \omega^2 + i\left(A_1 B_0 - B_1\right)\omega\right]$$

$\eta = 0(\omega) \ll |\xi| = 0\,(\omega^2)$; donc

$$\alpha^2 \sim \frac{\eta^2}{4|\xi|} \qquad ; \quad \frac{\omega^2}{c^2} \sim -\xi \sim 0(\omega^2)$$

$$\begin{cases} \alpha^2 \sim 0(1) \\ c^2 \sim 0(1) \end{cases}$$



Variation de α, c en fonction de ω pour $A_2 = 0$, $B_2 = 0$

5. - CONCLUSIONS.

On constate,d'après ce qui précède, que l'allure générale des courbes $c(\omega)$ et $\alpha\,(\omega)$, relevées dans une bande de fréquences qui ne comprendra généralement, vu les difficultés d'expérimentation, ni les très graves, ni les très aiguës, ne diffère pas tellement, suivant les hypothèses faites, qu'elle permette une discrimination entre elles. Il faudra donc avoir recours au calcul effectif des coefficients A_i, B_i, à partir des points expérimentaux qui donneront, pour un ω donné, α et c, donc ξ et η . A chaque fréquence observée correspondent donc (en séparant les parties réelles et imaginaires) deux équations aux A_i, B_i; dans le cas du schéma à 5 paramètres, 3 fréquences observées fourniront une équation de contrôle, mais il sera prudent d'avoir à sa disposition davantage de points, pour pouvoir chiffrer la dispersion des résultats. Si le schéma essayé convient, cette dispersion devra être faible; si le schéma essayé peut être réduit, les valeurs (nulles en principe) trouvées pour certains coefficients devront être au plus de l'ordre de grandeur des écarts admis pour les autres.

On peut aussi faire des approximations successives, c'est à dire partir d'un schéma à un paramètre pour déterminer $\frac{B_\circ}{A_\circ}$; porter cette valeur dans un schéma à trois paramètres qui donnera $\frac{B_1}{A_\circ}$ et $\frac{A_1}{A_\circ}$; passer enfin au schéma à cinq paramètres pour obtenir $\frac{B_2}{A_\circ}$ et $\frac{A_2}{A_\circ}$.
Les calculs sont plus faciles, mais la convergence quelque peu aléatoire.

Dans ce qui suit, nous nous sommes surtout attaché à la mise au point d'une méthode expérimentale susceptible de fournir des valeurs suffisamment sûres de $c(\omega)$ et de $\alpha(\omega)$ pour des corps présentant un amortissement relativement élevé, les procédés usuels étant alors d'application incertaines. Nous avons bien calculé les coefficients caractéristiques A_i, B_i résultant de nos mesures, mais cela a été surtout à titre indicatif; d'une part, en effet, nous n'avons pas disposé des moyens de calcul qui auraient permis la meilleure détermination numérique; de l'autre, nos mesures ont porté sur des échantillons qui n'ont aucune valeur exemplaire, puisqu'il ne s'agissait pas de corps purs, mais de mélanges où les proportions des ingrédients auraient aussi bien pu être différentes. Nous n'attribuons donc pas de valeur autre qu'indicative aux résultats de ces calculs.

CHAPITRE I

PROPAGATION D'ONDES PROGRESSIVES DANS LE CAOUTCHOUC ÉTIRÉ

L'étude de la propagation d'ondes dans les matériaux a pris une grande importance depuis quelques années; les propriétés dynamiques du béton, de l'acier par exemple, s'étudient de plus en plus par une méthode vibratoire. Mais on avait généralement admis que la propagation s'effectuait sans perte d'énergie, et le module d'Young était déterminé par la formule $E = \rho C^2$. Or, en étudiant les matériaux visco-élastiques, on s'est aperçu que cette approximation n'était plus acceptable; il fallait introduire dans les équations du mouvement des termes de dissipation d'énergie correspondant au frottement interne du matériau.

1. - CHOIX D'UNE METHODE.

Il nous faut donc déterminer à la fois le module d'Young, c'est à dire la vitesse de propagation C et le frottement interne, c'est à dire le coefficient d'amortissement α. On peut utiliser pour cela diverses méthodes.

1°). - L'une d'entre elles consiste à relever la courbe de résonnance du matériau considéré, soumis à une excitation sinusoïdale entretenue: si f_η est la $n^{ème}$ fréquence de résonnance et δ la longueur de la pointe (c'est à dire la différence des fréquences de part et d'autre de f_η pour lesquelles l'amplitude est la moitié de l'amplitude de résonnance), le coefficient d'amortissement α est proportionnel à δ et la vitesse de propagation est $2 D f_\eta$, où D est la distance observée entre deux nœuds successifs. Si le matériau est très peu amorti, les résonnances sont très nettes et l'on a f_η avec une bonne approximation; en revanche les pointes ont une longueur très faible sur la mesure de laquelle on peut commettre une erreur considérable. Si le matériau est très amorti, les

pointes sont de faible amplitude et de grande largeur; aussi bien les fréquences f_η que celles correspondant à l'amplitude moitié sont de détermination incertaine. On voit donc que la méthode de résonnance ne convient que pour des matériaux moyennement amortis. De plus elle ne donne C et α qu'aux fréquences de résonnance de l'éprouvette.

2°).- On peut aussi relever en un point l'amplitude de l'oscillation libre amortie excitée par un choc: l'intervalle de temps entre l'instant du choc et celui où l'onde parvient au point d'observation donne la vitesse de propagation C; le rapport des amplitudes de deux extrèmums successivement observés donne l'amortissement.

La mesure de C demande pour être précise un balayage très rapide de l'oscillographe; l'amortissement ne sera connu avec précision que si la plus faible des amplitudes mesurées est encore suffisamment grande devant les erreurs de mesure. Cette méthode ne convient donc pas à l'étude de matériau très amorti.

3°).- Il en est encore de même si l'onde pseudo-stationnaire excitée par un oscillateur entretenu est détectée le long de l'éprouvette: la vitesse de propagation se déduit de la distance entre deux nœuds; l'amortissement s'obtient à partir des amplitudes de deux ventres successifs; il en résulte que comme pour la méthode précédente les amortissements élevés ne seront déterminés que d'une façon très imprécise.

4°).- Pour obvier à ces inconvénients, nous avons cherché à mesurer une grandeur dont l'amplitude ne dépende pas de l'importance de l'amortissement. Cette grandeur est la phase de l'onde pseudo-stationnaire excitée comme ci-dessus; nous montrerons plus loin comment on peut déduire C et α de la mesure de la phase. Cette méthode s'est révélée très précise même dans le cas de matériau très amorti et nous la croyons susceptible de nombreuses applications.

2. - THEORIE DE LA METHODE.

On entretient dans un barreau visco-élastique AB de longueur l des vibrations longitudinales à l'extrémité B. Une onde amortie peut s'écrire d'une façon générale sous la forme:

$$y = y_0 \, e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Le mouvement vibratoire en un point x, dans le cas de ce barreau, est donné par la somme de toutes les vibrations dues aux différentes ondes qui se réfléchissent sur les faces A et B, et qui arrivent en x des deux côtés. Supposons que cette réflexion se fasse sans absorption.

a) Ondes arrivant au point x en venant du côté de B:

L'onde arrivant directement de B aura parcouru au point x la distance $x_1 = l - x$

$$y_1 = y_0 \, e^{-\alpha(l-x)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{l-x}{c}\right)}$$

elle se réfléchit, se propage vers B, atteint cette face et se réfléchit de nouveau vers A: elle aura atteint de nouveau ce point après un parcours $x_2 = 2l + l - x$

$$y_2 = y_0 \, e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c} 2l}$$

à son troisième passage en A, elle aura parcouru $x_3 = 4l + l - x$. La somme de toutes ces ondes formera une progression géométrique de terme y_1 et de raison $R = e^{-2l - i\frac{\omega}{c} 2l}$

$$\sum y = \frac{y_0 \, e^{-\alpha(l-x)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{l-x}{c}\right)}}{1 - e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c} 2l}}$$

b) Ondes arrivant au point x en venant du côté de A:

L'onde venant de B a été réfléchie une fois sur A, aura parcouru au point x la distance $x_1 = l + x$

$$X_1 = y_0 \, e^{-\alpha(l+x)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{l+x}{c}\right)}$$

et par le même raisonnement que précédemment nous aurons:

$$\sum X = \frac{X_1}{1-R} = \frac{y_0 e^{-\alpha(l+x)} e^{i\omega\left(t-\frac{l+x}{c}\right)}}{1-e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c}2l}}$$

Le mouvement résultant au point x est donc donné par:

$$\sum X + \sum Y = \frac{y_0}{1-e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c}2l}} \left[e^{-\alpha(l-x)+i\omega\left(t-\frac{l-x}{c}\right)} + e^{-\alpha(l+x)+i\omega\left(t-\frac{l+x}{c}\right)} \right]$$

$$= \frac{y_0 e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c}2l}}{1-e^{-2\alpha l - i\frac{\omega}{c}2l}} \left[e^{\alpha x + i\omega\frac{x}{c}} + e^{-\alpha x - i\omega\frac{x}{c}} \right] e^{i\omega t}$$

Nous pouvons omettre dans la suite le coefficient $\frac{y_0 e^{\cdots\cdots}}{1-e^{\cdots\cdots}}$

qui est une constante dans les conditions de l'expérience (ω, α, l invariables), et qui figure dans toutes les expressions de y; nous écrirons donc simplement:

$$y(x,t) = e^{i\omega t}\left[e^{\alpha x + i\omega\frac{x}{c}} + e^{-\left(\alpha x + i\omega\frac{x}{c}\right)} \right]$$

Au point x = 0 $\quad y(o,t) = 2e^{i\omega t}$

au point $x = x_1$ $\quad y(x_1,t) = Z_1 e^{i\omega t}$

avec $\quad Z_1 = e^{-\left(\alpha x_1 + i\omega\frac{x_1}{c}\right)} + e^{\alpha x_1 + i\omega\frac{x_1}{c}} = |Z_1| e^{-i\theta_1}$

on a $\quad tg\,\theta_1 = i\frac{Z^* - Z}{Z^* + Z} = i\frac{\left(e^{i\omega\frac{x}{c}} - e^{-i\omega\frac{x}{c}}\right)\left(e^{-\alpha x} - e^{\alpha x}\right)}{\left(e^{i\omega\frac{x}{c}} + e^{-i\omega\frac{x}{c}}\right)\left(e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}\right)}$

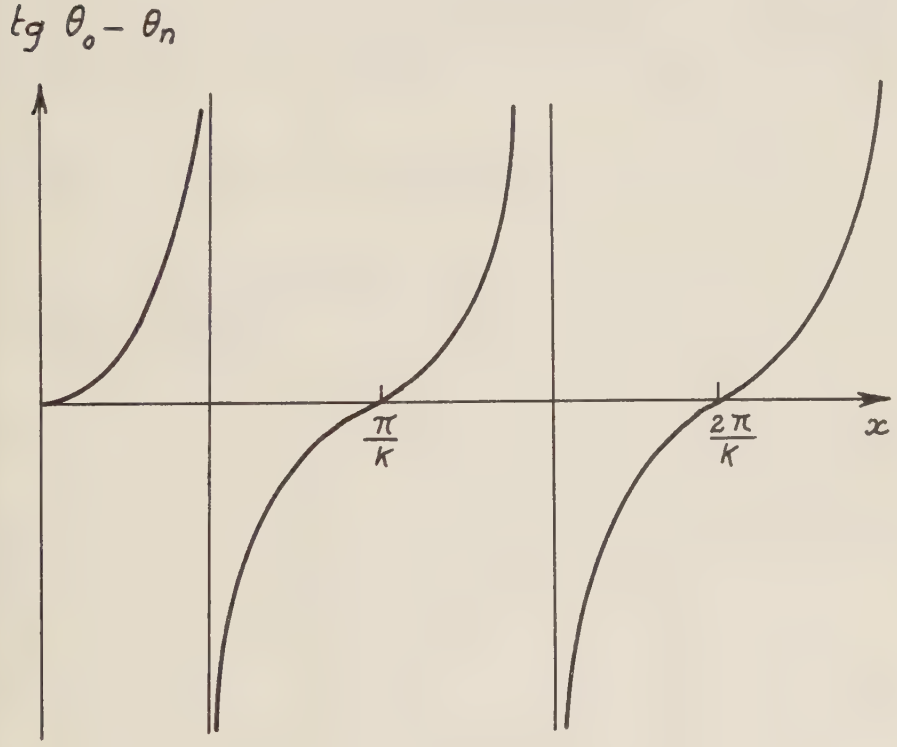
soit $\quad tg\,\theta_1 = tg\,\frac{\omega}{c}x_1 \cdot th\,\alpha x_1$

En fait, on peut mesurer le déphasage entre les amplitudes en x_1 et en 0 au moyen d'un appareillage électronique, qui introduit un déphasage supplémentaire constant θ_o, de sorte que la formule précédente devient:

$$tg(\theta_1 - \theta_o) = tg\,\frac{\omega}{c}x_1\,th\,\alpha x_1$$

On pourra donc tracer la courbe théorique reliant θ et x (fig. 1).

La relation (2) et la figure 1 montrent que la distance entre deux zéros successifs est $\pi\, c/\omega$ d'où la valeur de la vitesse pour une fréquence donnée. Ainsi sans recourir au calcul, il suffira d'évaluer à l'aide de la courbe expérimentale tg $(\theta_o - \theta_n) = f(x_n)$ la distance qui sépare deux zéros de la courbe. En appliquant la relation (2) où le premier membre est l'ordonnée lue sur la courbe pour une abscisse donnée, et en donnant à C la valeur précédemment trouvée on pourra déterminer α avec une excellente approximation, puisque nous pouvons faire le calcul pour autant de points de la courbe que nous le voulons, et appliquer une méthode de moyenne telle que la méthode des moindres carrés.



- Figure 1 -

Courbe théorique $tg(\theta_o - \theta_n) = f(x_n)$

3. - METHODE EXPERIMENTALE.

A. - Principe du montage.

Nous avons étudié les propriétés dynamiques du caoutchouc type "pure gomme" et d'autres matériaux comme le bitume: il a fallu donc pour chaque cas un montage différent.

Les éprouvettes de caoutchouc étaient, dans nos expériences, de 30 centimètres de longueur et de un centimètre carré de section. Elles étaient pincées aux deux extrémités par des mâchoires striées afin d'éviter le glissement du caoutchouc lorsque celui-ci est tendu. L'une des mâchoires était fixe, et l'autre, mobile, était fixée à un ruban d'acier s'enroulant sur un tambour relié à une manivelle par un système d'engrenage; de cette manière, l'éprouvette pouvait être étirée à plus de 600% de sa valeur initiale.

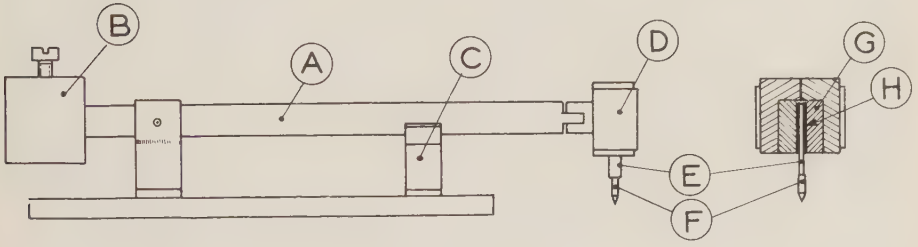
Des vibrations étaient excitées dans l'éprouvette par un générateur, et recueillies en un point variable par un récepteur.

Le montage expérimental avait servi au début de notre travail pour l'étude de matériaux très amortis. Pour entretenir les vibrations nous avions utilisé un haut-parleur électrodynamique placé en face d'une section terminale de l'éprouvette afin d'y exciter des ondes planes progressives; mais deux inconvénients majeurs nous firent renoncer à ce procédé: primo, le récepteur était sensible aux ondes aériennes et secundo la puissance du haut-parleur était insuffisante; Après maints essais, nous avons choisi comme générateur un graveur de disque, dont le burin avait été remplacé par une aiguille se terminant par une demi-sphère: ceci afin que l'aiguille ne pénètre pas dans le matériau, ce qui aurait risqué de fausser les résultats. Dans le cas du caoutchouc, le graveur était placé tête retournée à l'extrémité du barreau au point $x = l$; les mesures étaient alors plus précises et plus stables.

Les vibrations mécaniques du caoutchouc recueillies au point x étaient transformées en tension électrique par un récepteur . Celui-ci était constitué au début de notre étude par un pick-up du commerce, dont la courbe de réponse, relevée au moyen d'un disque de fréquence, avait été rectifiée par des circuits compensateurs. Mais ces pick-up, constitués pour la plupart par des sels de Seignette trempant dans une matière visqueuse (afin d'amortir les vibrations) n'ont pu convenir: nos expériences ayant été faites à des températures allant jusqu'à 50°, les caractéristiques des pick-up changeaient profondément, et il était impossible d'avoir des mesures correctes. D'autre part, ils introduisaient un amortissement important et de valeur incertaine, dont il était difficile de tenir compte dans nos équations. Nous nous sommes

donc résolu à construire un récepteur et à l'étalonner nous-même.

Ce récepteur se compose d'une lame au titanate de baryum travaillant en flexion, de dimensions 16 x 2 x 0,7, pincée entre deux machoires en aluminium supportant deux électrodes. Une aiguille est collée à la lame (Fig. 2).



- Figure 2 -

A Bras en duralumin,
B Balancier,
C Support,
D Récepteur
E Lame au titanate de Baryum,
F Aiguille,
G Isolant,
H Armature.

Pour étalonner notre récepteur, nous avons utilisé les vibrations d'une lame mince flexible ayant une fréquence de résonnance très élevée, et excitée par un système électromagnétique; ces vibrations étaient successivement mesurées par le pick-up du commerce, dont nous connaissions la courbe de réponse, puis par notre récepteur; on a déterminé ainsi la longueur optimum de la partie vibrante du titanate, afin d'avoir une courbe de réponse aussi linéaire que possible en fonction de la fréquence.

Notre récepteur se prolonge par un bras en dural muni d'un balancier, réglable par une vis micrométrique, le poids du pick-up sur le caoutchouc étant un facteur important à la bonne marche de l'expé - rience.

L'ensemble du montage (Fig. 3) était enfermé dans une enceinte thermostatique; un levier extérieur permettait, par l'intermédiaire d'un câble simble, d'agir sur une came soulevant le bras du récepteur.

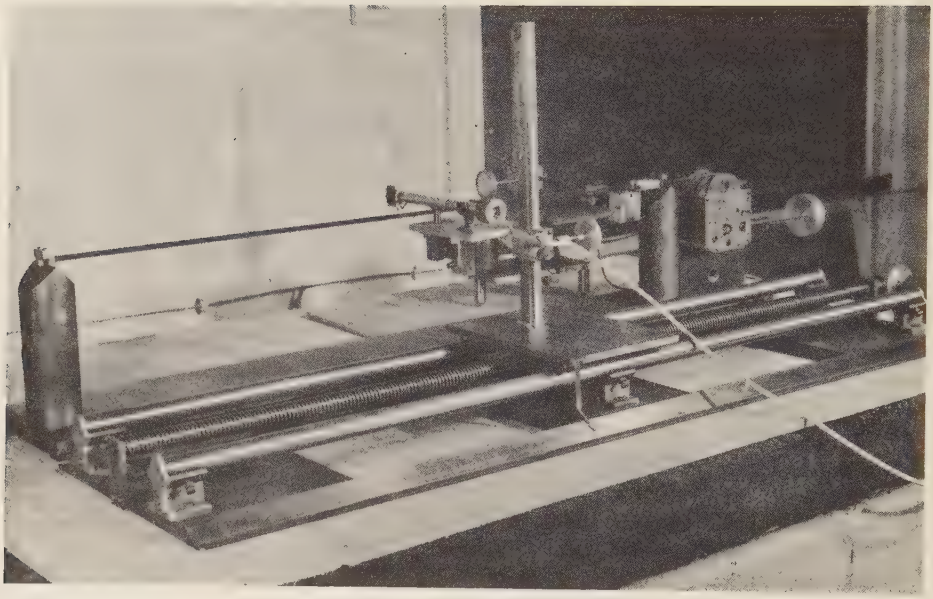


Photo du montage

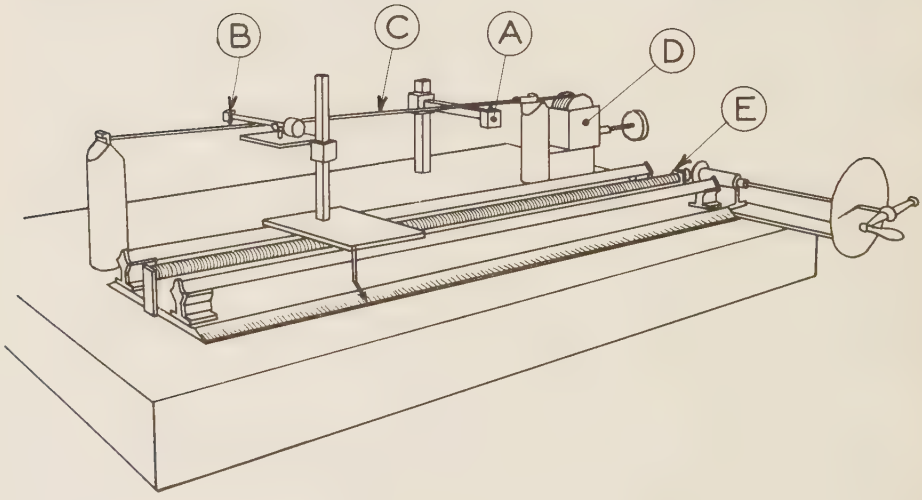


Schéma de l'appareillage

A Graveur,
B Récepteur
C Eprouvette
D Engrenage
E Vis sans fin.

Vue du montage.

Tout cet appareillage, came, bras, était fixé sur un plateau, lui-même porté par une crémaillère. Cette dernière reposait sur un plateau, guidé par une vis sans fin le long d'un banc d'optique bien dressé et bien plan. L'ensemble se déplaçait à l'aide d'une manivelle extérieure qui commandait un système d'engrenage calculé de manière que le déplacement du pick-up soit mesuré au 1/50ème de millimètre près.

L'enceinte thermostatique et le banc d'optique reposaient sur une fondation "flottante" constituée par un bloc lourd en pierre placé en "sandwich" entre deux semelles de liège de 10cm. d'épaisseur. De cette manière, aucune perturbation extérieure ne venait gêner les mesures.

L'enceinte thermostatique est constituée par une double paroi d'aluminium; l'espace entre ces deux parois est comblé par des plaques de laine de verre de 2centimètres d'épaisseur. On a collé sur toute la surface extérieure et intérieure de l'étuve du polystyrène expansé type "Porexpan". Une double ouverture vitrée permet l'accès facile au montage; plusieurs thermo-couples répartis à l'intérieur de l'enceinte mesurent à tout instant la température ambiante et vérifient son gradient. Deux ouvertures communiquent entre elles, par l'intermédiaire d'une boîte calorifugée, vissée sur l'enceinte et contenant le système chauffant; celui-ci

est constitué par un ventilateur soufflant sur des résistances chauffantes. Un rhéostat, grâce à un jeu de contacteurs, règle la température de l'étuve. On obtient ainsi une température quasi constante pendant plusieurs jours (à $\pm$ 0,25°C près).

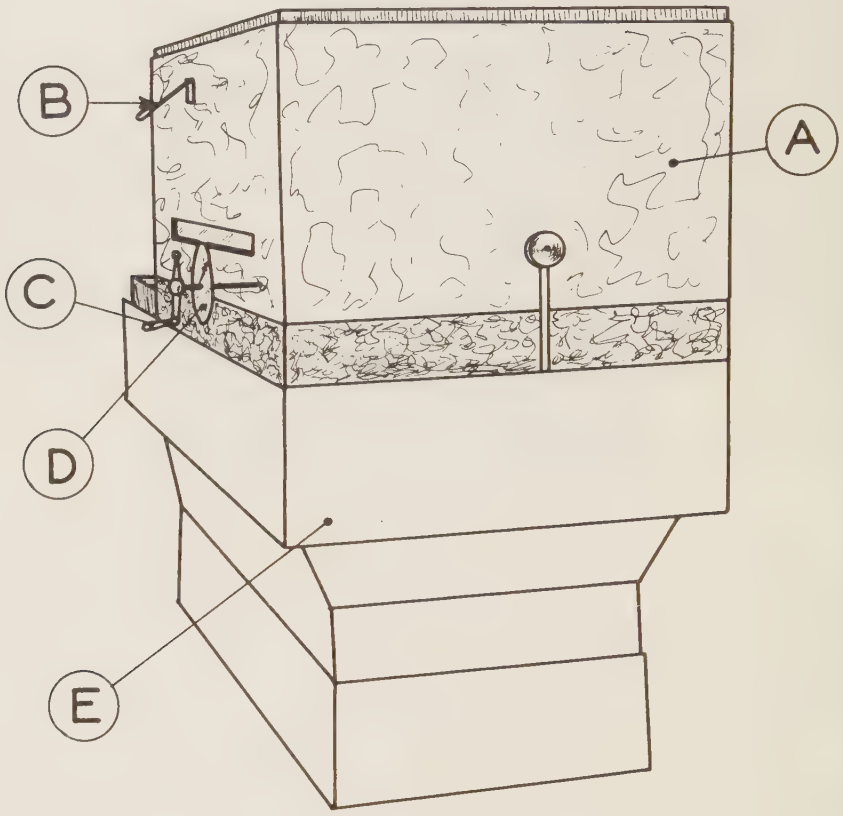
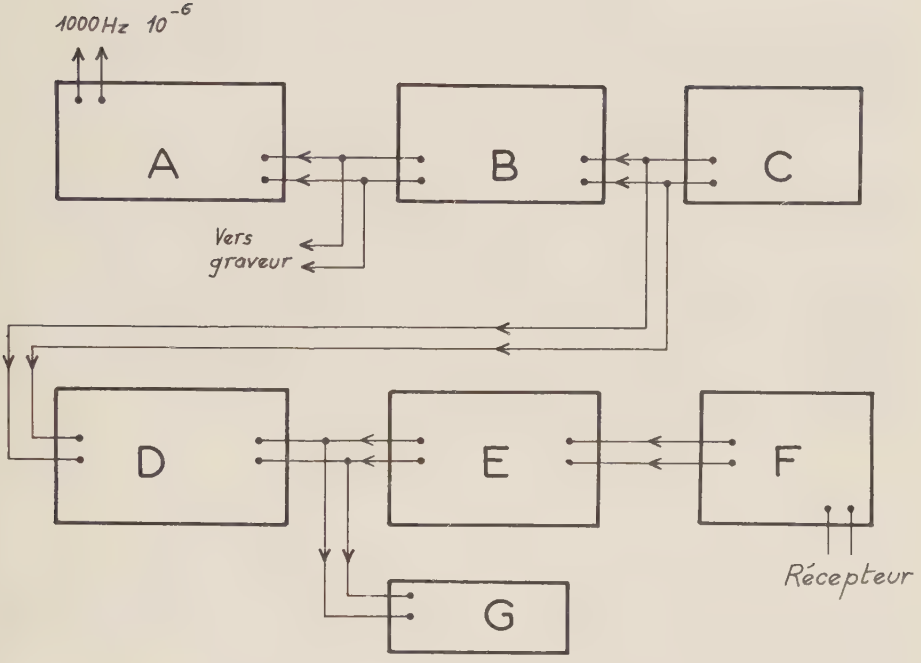


Schéma de l'ensemble.

- Figure 4 -

A Enceinte thermostatique
B Debrayage du récepteur
C Manivelle de réglage
D Disque gradué (au 1/100)
E Montage antivibratile.

B. - Principe de l'appareillage.



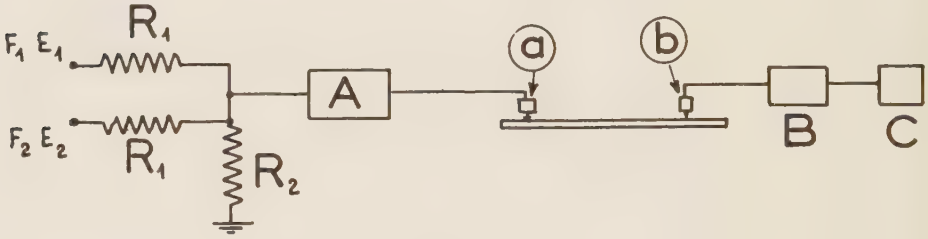
- Figure 5 -

A Oscillographe
B Amplificateur de puissance
C Générateur
D phasemètre
E Filtre passif
F Amplificateur de mesure
G Millivoltmètre.

La tension du graveur était fournie par un générateur de signaux sinusoïdaux type "Férisol" dont la fréquence était comparée à celle d'un diapason étalon par l'intermédiaire d'un oscillographe cathodique.

La tension électrique recueillie par le récepteur, amplifiée par un amplificateur de mesure, était filtrée par l'intermédiaire d'un filtre demi-octave: cet amplificateur de mesure a été construit en laboratoire de manière à éliminer toute rotation de phase entre la tension d'entrée et de sortie, pour toute fréquence et pour toute variation du gain de l'amplificateur. Pour ce faire, les capacités parasites de l'atténuateur ainsi que celles des différents étages amplificateurs étaient compensées par des capacités convenablement choisies.

Par un montage approprié, nous avons constaté que si le signal excitateur était composé de deux signaux sinusoïdaux de fréquence F_1 et F_2 la réponse du récepteur était elle-même composée de ces deux fréquences; le comportement du caoutchouc était donc bien linéaire pour ces petites déformations. Ce montage était constitué d'un mélangeur à résistance monté suivant le schéma ci-dessous. Les deux tensions égales E_1 et E_2 de fréquence respective F_1 et F_2 se retrouvent à la sortie de l'amplificateur A (on a vérifié la linéarité de cet amplificateur). Ces deux tensions alimentent le graveur de disque. On a vérifié à l'aide d'un analyseur de fréquence qu'à la sortie du pick-up la tension était composée de deux tensions ayant chacune la fréquence F_1 et F_2.



- Figure 6 -

R_1, R_2	Résistances	a excitateur
A, B	Filtres linéaires	b récepteur.
C	Analyseur de fréquences	

L'étude de la vitesse du son et de l'amortissement pour chaque ...rre a été réalisée comme suit:

On explorait entièrement, à l'aide du pick-up, centimètre par centimètre l'état vibratoire de la barre de caoutchouc, ce qui nous donnait l'allure de la courbe $y = \text{Th}\,\alpha x \; \text{tg}\,\frac{\omega}{c} x$ et nous permettait de mesu-

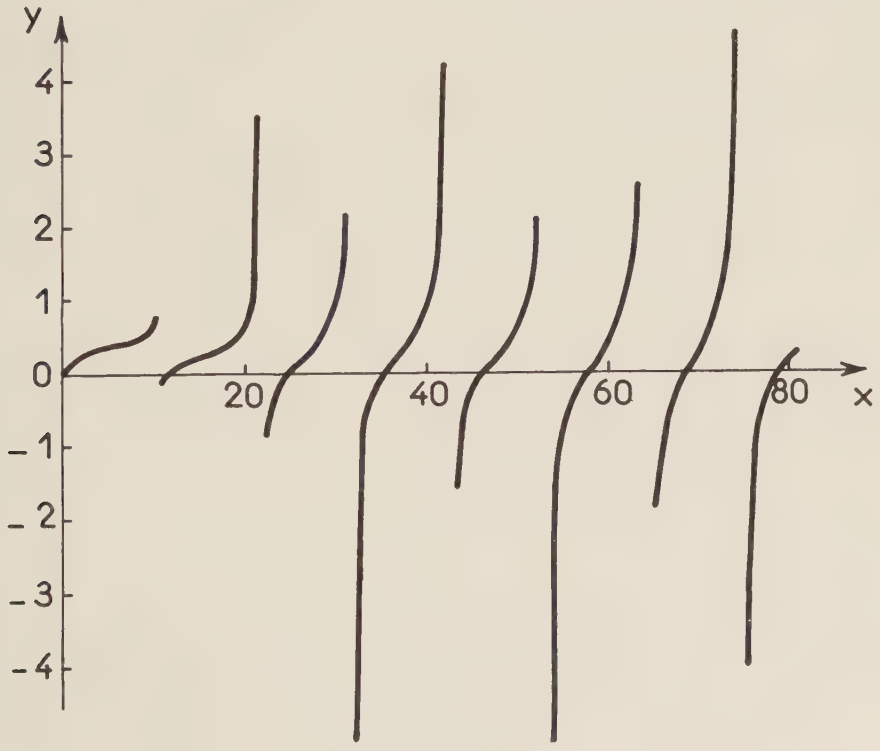
rer C. Pour obtenir l'amortissement, une plus grande précision était nécessaire: on reprenait donc l'exploration de la barre sur ses vingt centimètres terminaux, en faisant des mesures à chaque millimètre.

On a pu constater ainsi:

1°). - que la fidélité était très satisfaisante: on retrouvait bien les mêmes résultats lorsque la mesure était faite dans les mêmes conditions;

2°). - que la sensibilité était suffisante pour avoir tous les millimètres des variations de phase qui se placent bien sur une courbe continue.

Toutes les courbes tg $(\theta_o - \theta_n)$ obtenues sont de la forme de la courbe théorique décrite plus haut. Ainsi la figure 7 représente la courbe obtenue à 500Hz avec un étirement de 250%.



- Figure 7 -

L'hypothèse selon laquelle la loi de propagation dans le caoutchouc était de la forme

$$y = y_0 e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

semble donc qualitativement acceptable. En fait les vérifications numériques (calcul de C pour chaque zéro) confirment l'hypothèse avec une très bonne approximation.

CHAPITRE II

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous allons rendre compte dans ce chapitre d'une première application de la méthode qui vient d'être décrite: il s'agit de la détermination du comportement du caoutchouc, à différents degrés de vulcanisation et pour différents allongements.

Nos expériences ont porté sur des éprouvettes du type "pure gomme" dont la composition chimique était la suivante:

- caoutchouc naturel	100
- acide stéarique	0,5
- ZnO	2
- D P G (diphényl-guanidine)	1
- Phényl B naphtylamine	1

Nous avons utilisé deux éprouvettes différentes, l'une vulcanisée à 140° pendant 30 minutes, l'autre vulcanisée à la même température, mais pendant 90 minutes. Ces éprouvettes avaient 30 centimètres de long et 1 centimètre carré de section; elles nous avaient été fournies gracieusement par l'Institut Français du Caoutchouc. Afin d'éliminer tout phénomène héréditaire parasite, nous les avions étirées plusieurs fois à 500% puis trempées pendant quelques minutes dans de l'eau bouillante.

Nous avons mesuré la vitesse de propagation c et l'amortissement α d'une onde sonore en fonction de l'allongement $\frac{\Delta L}{L}$, de la température, et de la fréquence. La méthode ne permet de travailler que dans une gamme de fréquence restreinte: les courbes $y = th\ \alpha x\ tg\ kx$ se resserrent au fur et à mesure que la fréquence augmente, et il est difficile de déterminer avec précision la distance entre deux zéros (d'où l'on tire c) lorsque cette distance est trop faible; ainsi, pour $f > 1000$ Hz la distance devient < 1 cm. Inversement, pour une fréquence trop basse

(au dessous de 200 Hz) on n'obtient généralement qu'une seule branche de courbe; la détermination de c est donc impossible.

Les tableaux I et II donnent les résultats moyens de toutes nos mesures; il faut noter qu'à chaque ensemble de valeurs des paramètres (fréquence, allongement, température) correspond une courbe expérimentale $y = th\alpha x th\, kx$, dont le dépouillement minutieux a conduit à la valeur inscrite au tableau. La figure 7 du Chapitre I représente une de ces courbes expérimentales. Nous évaluons à 1% la précision avec laquelle on connaît c; la valeur de α, quoique déterminée à partir de plusieurs points expérimentaux, est plus délicate à obtenir, mais on peut estimer néanmoins quela précision est d'environ 5%.

Les résultats obtenus appellent quelques remarques.

1°) la température a une grande influence sur la vitesse de propagation, surtout pour les grands allongements. Ceci tient au fait que:

a) la vitesse de cristallisation du caoutchouc augmente considérablement avec l'étirement pour un allongement supérieur à 300%; Treloar attribue ce fait à l'élévation du point de fusion résultant de la diminution d'entropie de la phase amorphe.

b) la vitesse de cristallisation est très sensible à la température, et décroît avec elle; or la vitesse de propagation, étroitement liée au module d'Young, est d'autant plus grande que le corps est plus cristallisé. Ainsi que nous pouvons le voir sur les tableaux I et II, le phénomène est très marqué pour des allongements supérieurs à 300%, ce qui est bien en conformité avec la théorie de Treloar.

2°) Pour une fréquence donnée, l'amortissement diminue lorsque l'étirement croît, et augmente avec la température.

Comme nous l'avons dit au 1°), alinéa a), la vitesse de cristallisation augmentant considérablement avec l'étirement, le barreau de caoutchouc devient moins amorphe et amortit beaucoup moins les vibrations.

Le phénomène de l'accroissement de l'amortissement avec la température s'explique de même par l'alinéa b) du 1°) où la vitesse de cristallisation décroît avec la température.

CAOUTCHOUC VULCANISE 30 mn .

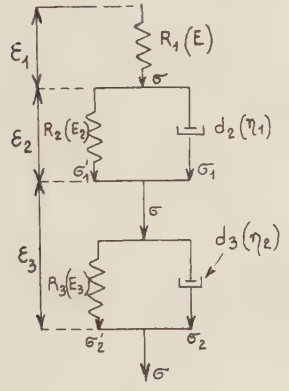
		ALLONGEMENT											
Fréquence	t° C	50%		100%		200%		300%		400%		500%	
		c(m/s)	(cm^{-1})	c		c		c		c		c	
200 Hz	20	31	0,09	50	0,055	60	0,014	100	0,0055	220	0,003	360	0,0022
	30	25		40		50		85		200		320	
	50							65	0,0062	116	0,005	210	0,0045
400 Hz	20	35	0,092	58	0,06	75	0,017	130	0,0065	245	0,0038	420	0,0025
	30	27		47		64	0,020	115		225		360	
	50							90	0,0080	135	0,006	237	0,0051
500 Hz	20	40	0,094	62	0,062	83	0,019	145	0,0080	270	0,0042	450	0,003
	30	30		50		68		125		240		390	
	50							100	0,092	140	0,0065	260	0,0057
750 Hz	20	46	0,097	70	0,067	92	0,010	175	0,0092	290	0,0048	520	0,0035
	30	34		58		77		155		270		440	
	50							120	0,011	160	0,0075	220	0,0062
1 000 Hz	20	50	0,1	77	0,07	100	0,024	200	0,010	320	0,005	600	0,0045
	30	40		68		83		170		285		500	
	50							135	0,012	170	0,008	300	0,007

CAOUTCHOUC VULCANISE 90 mn .

Fréquence	t° C	ALLONGEMENT 50% c(m/s)	50% (cm^{-1})	100% c	100%	200% c	200%	300% c	300%	400% c	400%	500% c	500%
200 Hz	20	46	0, 06	58	0, 03	90	0, 007	150	0, 0027	320	0, 0019	500	0, 0011
	30	38		52		86		135		280		440	
	50	27				76		110	0, 0032	220	0, 0025	310	0, 0015
400 Hz	20	50	0, 063	62	0, 033	97	0, 0074	170	0, 0029	335	0, 0021	580	0, 0013
	30	42		57		90		156		300		530	
	50	32		47		79	0, 0082	125	0, 0037	240	0, 0028	420	0, 0020
500 Hz	20	54	0, 065	65	0, 036	104	0, 0076	190	0, 0031	360	0, 0023	630	0, 0018
	30	46		59		97		176		330		590	
	50	35		50		85	0, 009	155	0, 0045	250	0, 0035	480	0, 0028
750 Hz	20	59	0, 068	71	0, 038	110	0, 0078	210	0, 0033	390	0, 0027	720	0, 0021
	30	51		65		102		190		360		670	
	50	40		56		90	0, 0092	165	0, 0057	280	0, 0042	560	0, 0032
1 000 Hz	20	62	0, 07	75	0, 040	125	0, 008	235	0, 0037	410	0, 003	850	0, 0023
	30	56		69		118		220		370		750	
	50	46		59		108	0, 012	198	0, 0068	280	0, 042	600	0, 0037

Les figures 1, 2 et 3 donnent la vitesse c en mètre seconde, et l'amortissement α en cm^{-1} en fonction de la fréquence pour des valeurs différentes de l'allongement. On remarquera que ces courbes ont la même allure que celles trouvées dans l'étude des modèles rhéologiques, et en particulier pour le modèle à cinq paramètres, composé d'un ressort en série avec deux cellules de Voigt. Nous pouvons donc essayer de représenter le comportement de nos éprouvettes par un tel modèle.

Calculons la relation contrainte-déformation pour un tel modèle soumis à une contrainte σ. Par la loi de l'action et de la réaction, la même contrainte est appliquée au ressort R_1 et aux cellules $R_2\, d_2$, $R_3\, d_3$; si l'on pose



$$\frac{\eta_1}{E_2} = \tau_1 \quad \text{et} \quad \frac{\eta_2}{E_3} = \tau_2$$

et si l'on appelle ε la déformation, on peut écrire:

$$\sigma = \sigma_2 + \sigma_2' \qquad \sigma_2 = \eta_2 \frac{d\varepsilon_3}{dt}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_1' \qquad \sigma_2' = E_3 \varepsilon_3$$

$$\sigma = \varepsilon_1 E \qquad \sigma_1 = \eta_1 \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

$$\sigma_1' = E_2 \varepsilon_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

d'où

$$\sigma\left[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}\right] + \dot{\sigma}\left[\frac{\tau_1}{E_2}+\frac{\tau_2}{E_2}+\frac{1}{E_3}(\tau_1+\tau_2)\right] + \frac{\tau_1\tau_2}{E_1}\ddot{\sigma} - \varepsilon - (\tau_2+\tau_1)\dot{\varepsilon} - \tau_2\tau_1\ddot{\varepsilon} = 0$$

Si l'on intégre cette équation en imposant une contrainte constante appliquée brusquement au temps t = 0, c'est à dire

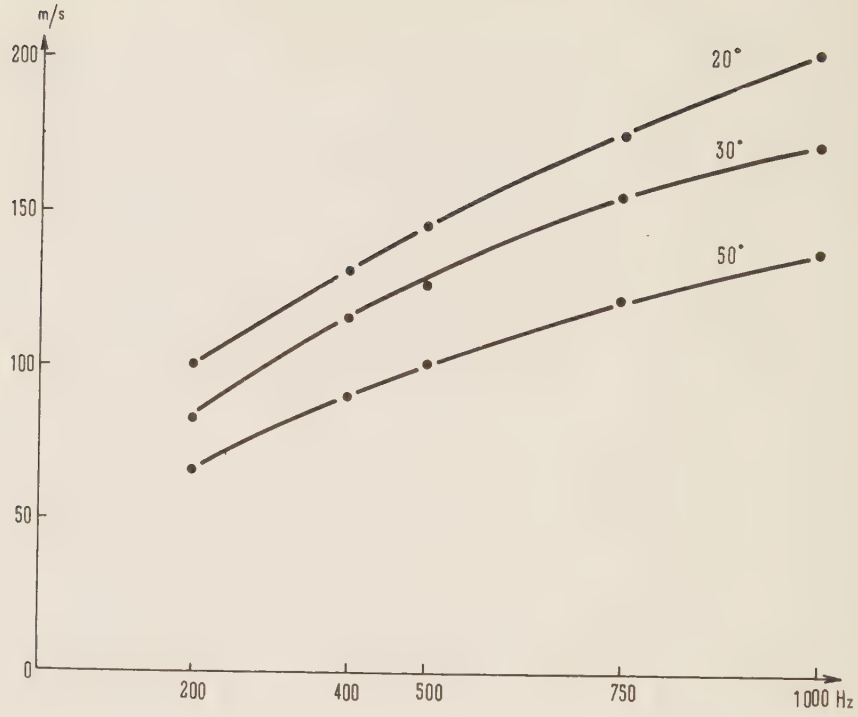
$$\sigma = 0 \qquad \text{pour} \qquad t < 0$$

$$\sigma = \sigma_0 \qquad \text{pour} \qquad t > 0$$

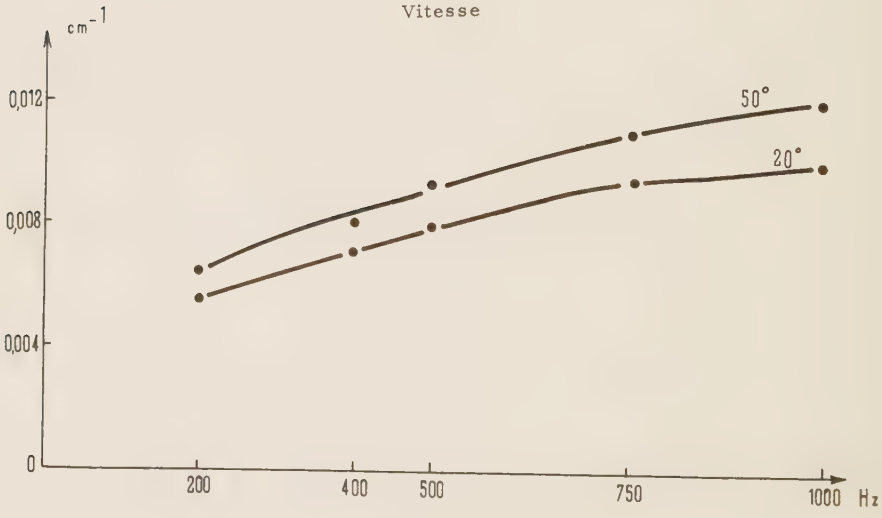
on obtiendra la valeur suivante de la déformation

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}\right]\sigma_0 \left[1 + \frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]$$

Tout se passe comme s'il y avait superposition de trois sortes de déformations correspondant à la contrainte σ.



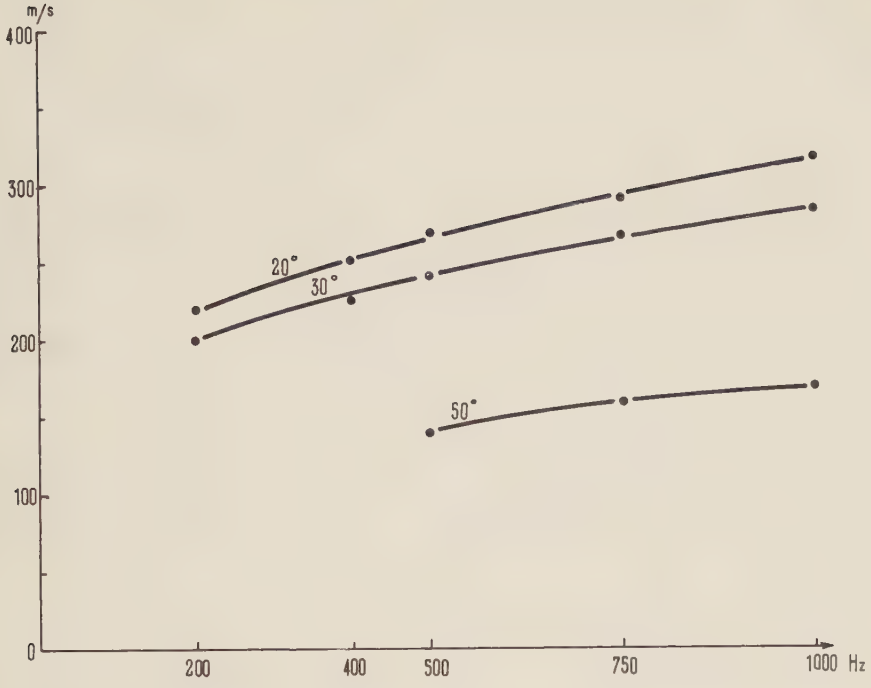
Vitesse



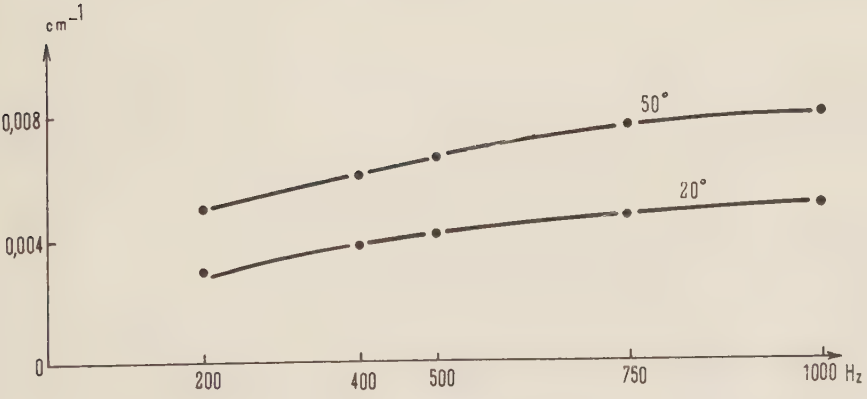
- Figure 1 -

Amortissement

$\frac{\Delta L}{L} = 300\%$



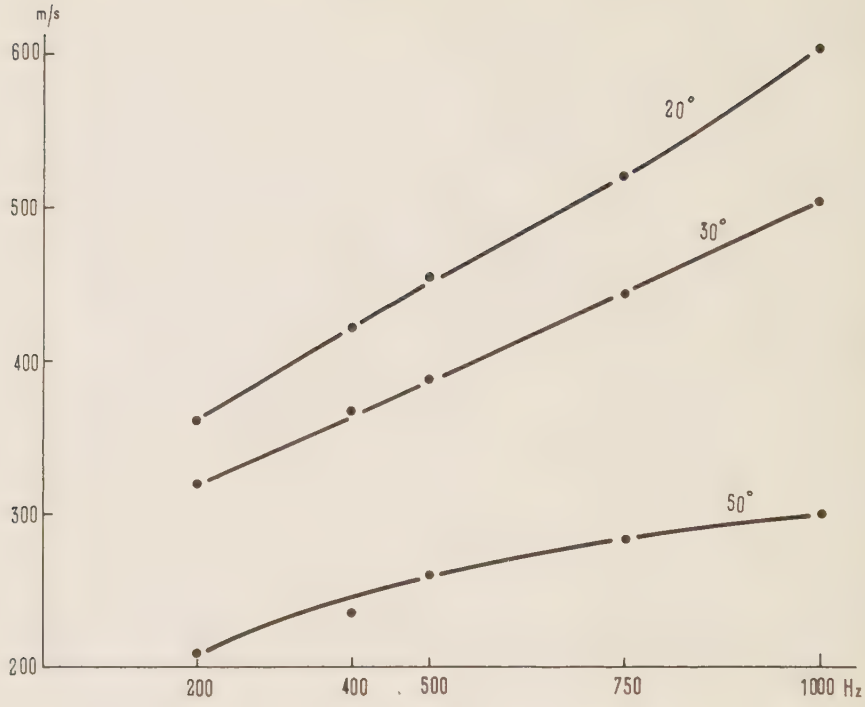
Vitesse



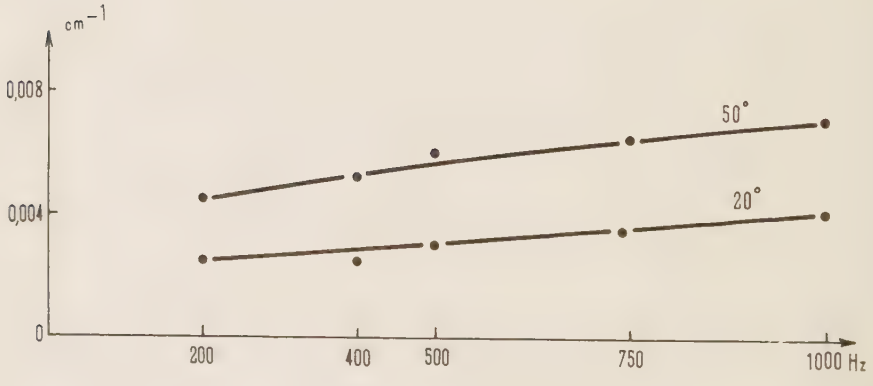
- Figure 2 -

Amortissement

$\frac{\Delta L}{L} = 400\%$



Vitesse



- Figure 3 -

Amortissement
$\frac{\Delta L}{L} = 500\%$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

La première déformation $\varepsilon_1 = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3}\right]\sigma_0$ est proportionnelle à la contrainte et indépendante du temps, donc conforme à la loi de Hooke, et exprime par conséquent ce qu'on peut appeler l'élasticité du corps. Les deux autres déformations ε_2 et ε_3 représentent deux "déformations retardées", de constantes de temps différentes τ_1 et τ_2 . Elles sont, en effet, du type étudié dans l'introduction (parag. 2 in fine): si un ressort est mis en parallèle avec un dashpot, sous l'action d'une contrainte le ressort s'allonge et le piston se déplace avec une résistance visqueuse, retardant ainsi l'allongement du ressort.

Nous avons évalué, de la façon qui a été expliquée dans l'introduction (parag. 5), les paramètres E_1, E_2, E_3, τ_1 , τ_2 mais le nombre de résultats était trop faible pour que l'on puisse attribuer aux calculs une valeur sûre. C'est donc à titre de pure indication que nous mentionnons les valeurs trouvées:

$E_1 = 2,3\ 10^{11}$ dynes/cm^2 $\tau_1 = 1,03\ 10^{-3}$ sec.

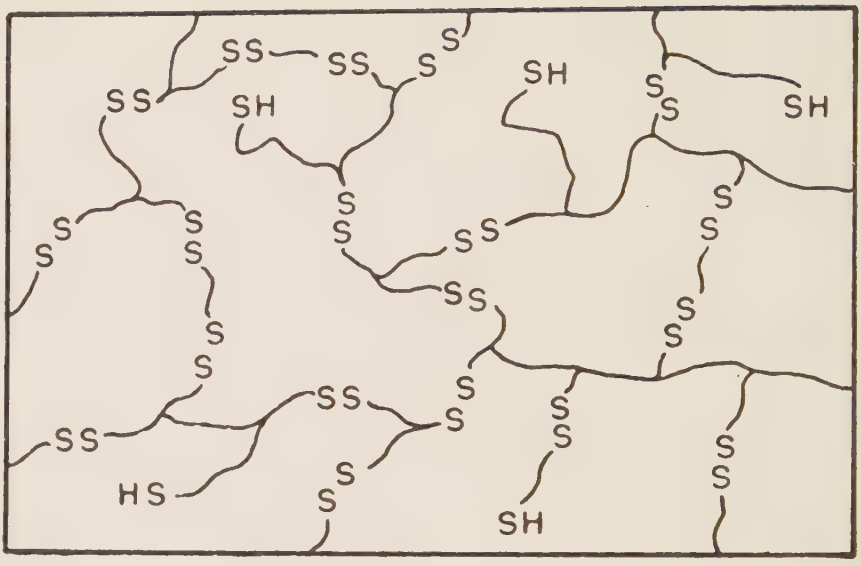
$E_2 = 0,5\ 10^{8}$ $\tau_2 = 0,03\ 10^{-3}$ sec.

$E_3 = 2\ 10^{6}$

Ce qui demeure, c'est que la méthode permettrait, si l'on disposait d'un nombre d'éprouvettes suffisant, de déterminer correctement ces constantes.

Notons en tout cas que nos évaluations sont conformes aux explications données jusqu'ici pour les "modèles rhéologiques"; d'autre part, elles sont compatibles avec celles trouvées par d'autres auteurs, qui se sont occupés de l'étude du comportement rhéologique du caoutchouc dans le domaine statique.

Nous allons essayer de montrer que la représentation analogique ci-dessus peut recevoir une interprétation physico-chimique. Considérons un corps visco-élastique dont la configuration moléculaire est constituée par de longues chaînes de molécules filiformes présentant des courbures: soit ρ_i ces rayons de courbures. S'il existe entre ces chaînes de molécules des ponts intermoléculaires, on peut supposer que ces ponts présentent aussi des courbures de rayons ρ_i . Ce qu'on croit savoir de la structure moléculaire du caoutchouc est conforme à ce schéma; ainsi la figure suivante représente (d'après Alfrey) une structure schématisée d'un réseau de molécule de caoutchouc vulcanisé.



L'élasticité représentée par le terme $\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3}$ correspondrait à la contraction ou à l'extension de tout l'ensemble du réseau moléculaire. (Cette déformation est d'ailleurs une fonction compliquée des forces inter et intra moléculaires). La déformation ε_2 correspondrait à la déformation des courbures ρ_i , cette déformation étant retardée par les forces intermoléculaires qui, elles, sont loin d'être élastiques. De même, la déformation ε_3 correspondrait à celle de ρ_i , dans l'hypothèse simple où la structure de la molécule ne comporte qu'un seul et même ρ pour toutes les chaînes filiformes, et un seul et même ρ pour tous les ponts. Cette interprétation indique à la fois la portée et les limitations d'une représentation à 5 paramètres pour le caoutchouc.

Si cette explication était correcte, et que l'on expérimentât sur un certain nombre d'éprouvettes à des taux de vulcanisation différents, ceux-ci correspondraient à des réseaux moléculaires qui différeraient surtout par les ponts intra ou inter moléculaires; les paramètres E_1, E_2, E_3 qui interviennent tous trois de la même façon dans ε , changeraient donc dans le même rapport; au contraire, les paramètres τ_1 et τ_2 correspondant à des aspects différents de la configuration moléculaire varieraient séparément. On aurait donc là un moyen de contrôler la vraisemblance de la manière de voir que nous venons d'exposer. Malheureusement, nous n'avons pas pu disposer d'un nombre suffisant d'éprouvettes différemment vulcanisées pour nous livrer à ce contrôle. Nous donnons donc l'explication ci-dessus à titre de simple suggestion.

CHAPITRE III

PROPAGATION D'ONDES PROGRESSIVES DANS LE BITUME

La méthode de phase employée pour étudier la propagation des ondes élastiques dans le caoutchouc type "pure gomme" a été ensuite utilisée afin d'étudier le comportement dynamique d'un matériau hétérogène. Celui-ci était constitué par un mélange de bitume et de gravier en proportions variables. On a mesuré, avec l'appareillage décrit au chapitre I, et légèrement modifié comme il sera dit, la vitesse de propagation c et l'amortissement α d'une onde progressive dans ce matériau.

PRINCIPE DE LA METHODE.

Comme dans le cas du caoutchouc, nous supposons que la vibration entretenue dans le barreau de bitume donne naissance à une onde plane longitudinale progressive de la forme:

$$y = e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

et qu'elle se réfléchit sans absorption aux extrémités de l'éprouvette. Le raisonnement fait au chapitre I s'applique sans modification: la différence de phase entre les vibrations aux points x=0, x_n sera donnée par:

$$\operatorname{tg}\left(\theta_0 - \theta_n\right) = \operatorname{th}\alpha x_n \operatorname{tg}\frac{\omega}{c} x_n$$

relation traduite par la courbe théorique (fig. 1, ch. I).

Dans les expériences dont nous allons rendre compte ici, nous avons utilisé un barreau de mastic composé de bitume, de filler et de gravier. Ce barreau avait 50 centimètres de long et 1 centimètre carré de section. Le choix de la longueur et de la section a été imposé par les conditions du montage expérimental, qui était celui dont nous nous sommes servi pour le caoutchouc. Suivant les éprouvettes, la teneur en bitume, d'une part, en filler et gravier de l'autre, était variable, les proportions

respectives de filler et de gravier étant toujours les mêmes. Suivant l'échantillon, le gravier avait deux calibres différents (tamisage à 4mm et à 8mm). Ces barreaux ont été fabriqués en laboratoire dans des moules que nous avons construits pour cet usage; les ingrédients nécessaires nous ont été fournis par le Laboratoire d'essais de la Chambre de Commerce de Marseille.

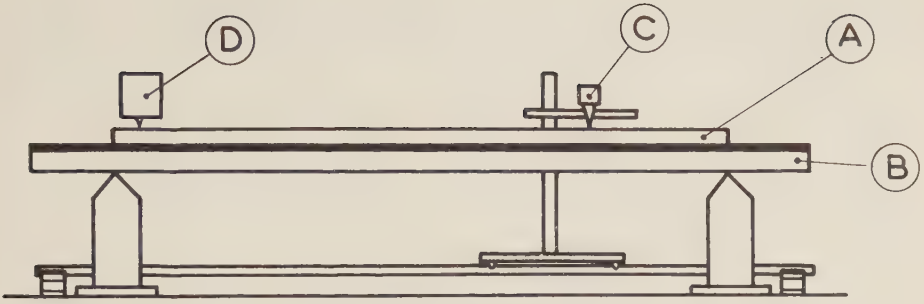
Le choix de la composition du mastic bitumineux et son mode de fabrication n'ont été imposés par aucune considération utilitaire: nous avons simplement voulu prouver que la méthode expérimentale de la mesure des phases, valables pour le caoutchouc, l'était aussi pour un matériau hétérogène, au moins lorsque les hétérogénéités ne sont pas trop grandes: si elles devenaient trop importantes, il deviendrait impossible de tracer les courbes de la figure 1 (chap. I) sur lesquelles se fonde l'application de notre méthode (voir plus loin).

APPAREILLAGE.

Nous avons placé le barreau de bitume sur un support en acier recouvert d'une très mince couche de caoutchouc, et avons constaté que ce recouvrement ne perturbait en rien les mesures. Le support en acier était monté sur amortisseur flexible afin de n'être gêné par aucune perturbation extérieure. Le barreau de bitume était excité par un graveur de disque (le même qui nous avait servi pour le caoutchouc), dont la pointe arrondie reposait sur le barreau par l'intermédiaire d'une mince feuille de clinquant; en effet, le bitume étant un matériau assez mou, la pénétration du graveur risquait de fausser les résultats (figures 1 et 2).

Des expériences préliminaires ont été faites afin de s'assurer qu'il n'y avait pas d'ondes transversales ni d'ondes de flexion, et que sur toute la longueur du barreau, le récepteur donnait les mêmes résultats. Pour cela, nous avons légèrement modifié le montage du récepteur, en lui permettant de prendre de nouvelles positions: pour déceler les vibrations transversales éventuelles, on a permis à la lame de titanate de baryum de tourner de 90°; pour déceler les vibrations de flexion, on a permis au récepteur ainsi tourné de reposer verticalement sur une face adjacente à celle qu'on excitait. En fait, aucune tension n'a été enregistrée au récepteur dans ces deux positions lorsque le graveur excitait des ondes longitudinales dans le barreau.

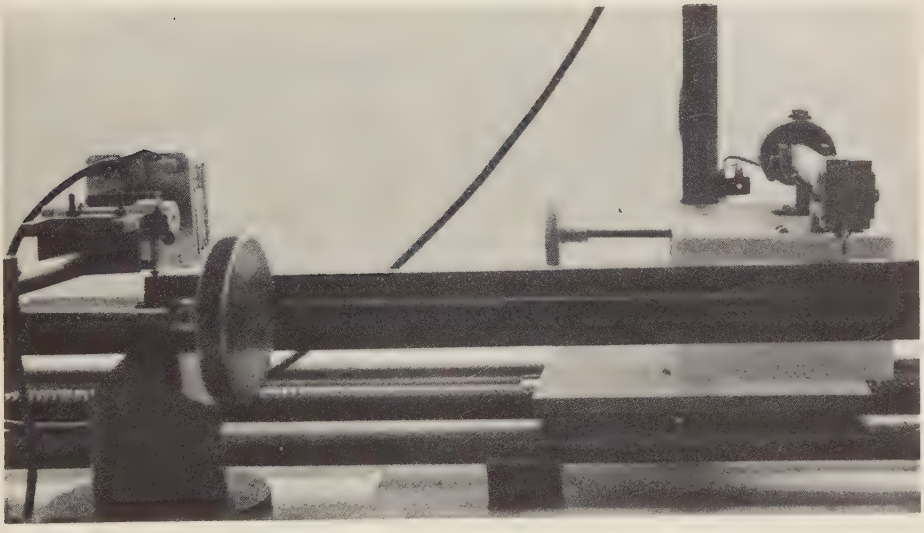
Le montage électronique décrit au chapitre I nous a permis de constater que si le signal excitateur était composé de deux signaux sinusoïdaux de fréquence F_1 et F_2, la réponse du récepteur était elle même composée de ces deux fréquences: le comportement du bitume était donc bien linéaire pour ces petites déformations.



- Figure 1 -

Principe du montage

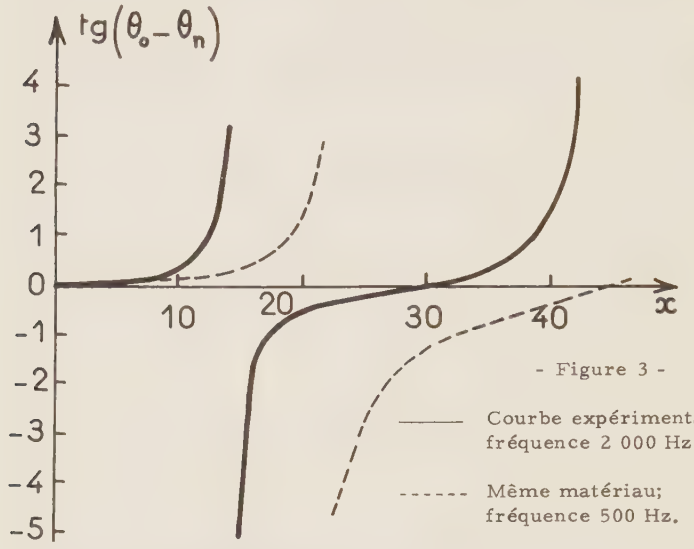
A Barreau
B Support
C Récepteur
D Graveur



- Figure 2 -

Photo du montage

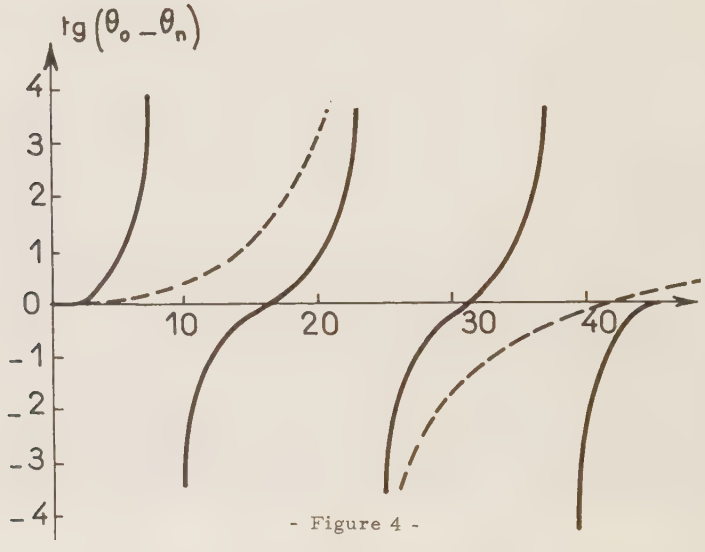
Les courbes tg ($\theta_o - \theta_n$) obtenues sont de la forme théorique décrite plus haut. Ainsi, les figures 3 et 4 montrent les courbes expérimentales tg ($\theta_o - \theta_n$) en fonction de x pour des fréquences de 2 000 Hz et 3 000 Hz pour deux mastics de composition différente.



- Figure 3 -

——— Courbe expérimentale pour un bitume pur fréquence 2 000 Hz

------ Même matériau; fréquence 500 Hz.



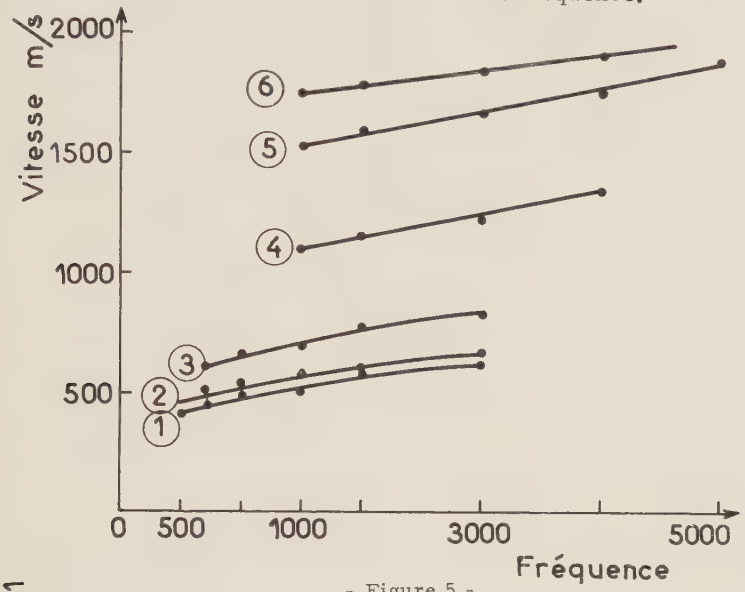
- Figure 4 -

——— Courbe expérimentale pour un mélange composé de 15% de bitume + sable de 4mm, fréquence 3 000 Hz

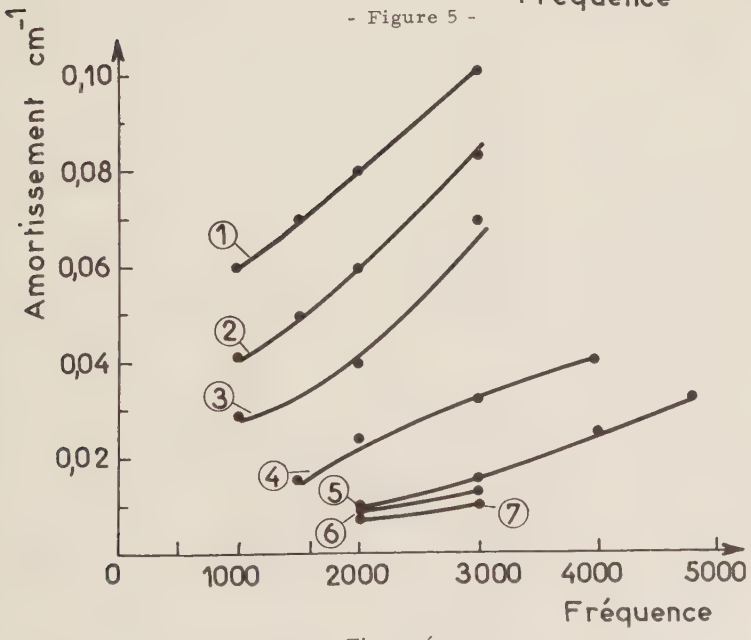
------- Même matériau, fréquence 1 500 Hz

L'hypothèse selon laquelle la loi de propagation dans le bitume est de la forme (1) et la reflexion sur les faces terminales de ce barreau se fait sans absorption semble donc qualitativement acceptable. En fait, les vérifications numériques (calcul de c pour chaque zéro) confirment l'hypothèse avec une très bonne approximation.

Les tableaux suivants ainsi que les figures 5 et 6 donnent la vitesse c et l'amortissement α en fonction de la fréquence.



- Figure 5 -



- Figure 6 -

VITESSE EN m/s								
Fréquence	500 Hz	750	1 000	1 500	2 000	3 000	4 000	5 000
Bitume pur (1)	410	450	480	510	580	630		
Bitume 80% (2) gravier 4mm	460	510	540	570	600	640		
Bitume 50% (3) gravier 4mm		600	660	690	780	820		
Bitume 25% (4) gravier 4mm				1 110	1 160	1 230	1 280	
Bitume 15% (5) gravier 4mm				1 540	1 600	1 680	1 760	1 900
Bitume 12% (6) gravier 8mm avec poche d'air				1 760	1 780	1 840	1 910	1 970
Bitume 12% (7) gravier 8mm sans poche d'air				1 900	2 040	2 060	2 080	2 100

AMORTISSEMENT EN cm - 1								
Fréquence	500 Hz	750	1 000	1 500	2 000	3 000	4 000	5 000
Bitume pur (1)			0, 06	0, 07	0, 08	0, 11		
Bitume 80% (2) gravier 4mm			0, 041	0, 05	0, 06	0, 083		
Bitume 50% (3) gravier 4mm			0, 029	0, 033	0, 04	0, 070		
Bitume 25% (4) gravier 4mm				0, 015	0, 024	0, 032	0, 040	
Bitume 15% (5) gravier 4mm					0, 010	0, 015	0, 020	0, 032
Bitume 12% (6) gravier 8mm avec poche d'air					0, 009	0, 013		
Bitume 12% (7) gravier 8mm sans poche d'air					0, 0072	0, 01		

Ces résultats montrent que:

1°) la vitesse de propagation ainsi que l'amortissement croît en fonction de la fréquence;

2°) au fur et à mesure que le barreau devient plus résistant ((1) bitume pur et (5) bitume composé de 46% de gravier de 8mm et 46% de filler) la vitesse de propagation c croît et l'amortissement diminue.

On pourrait, comme nous l'avons fait pour le caoutchouc, traduire les résultats obtenus dans une des représentations de la visco-élasticité linéaire. En effet, comme on peut le voir, ces courbes ressemblent à celles décrites dans l'introduction à propos des modèles mécaniques. Mais, comme nous l'avons déjà précisé dans le même chapitre, cette représentation ne satisfait au fond qu'à un certain goût de l'image simple.

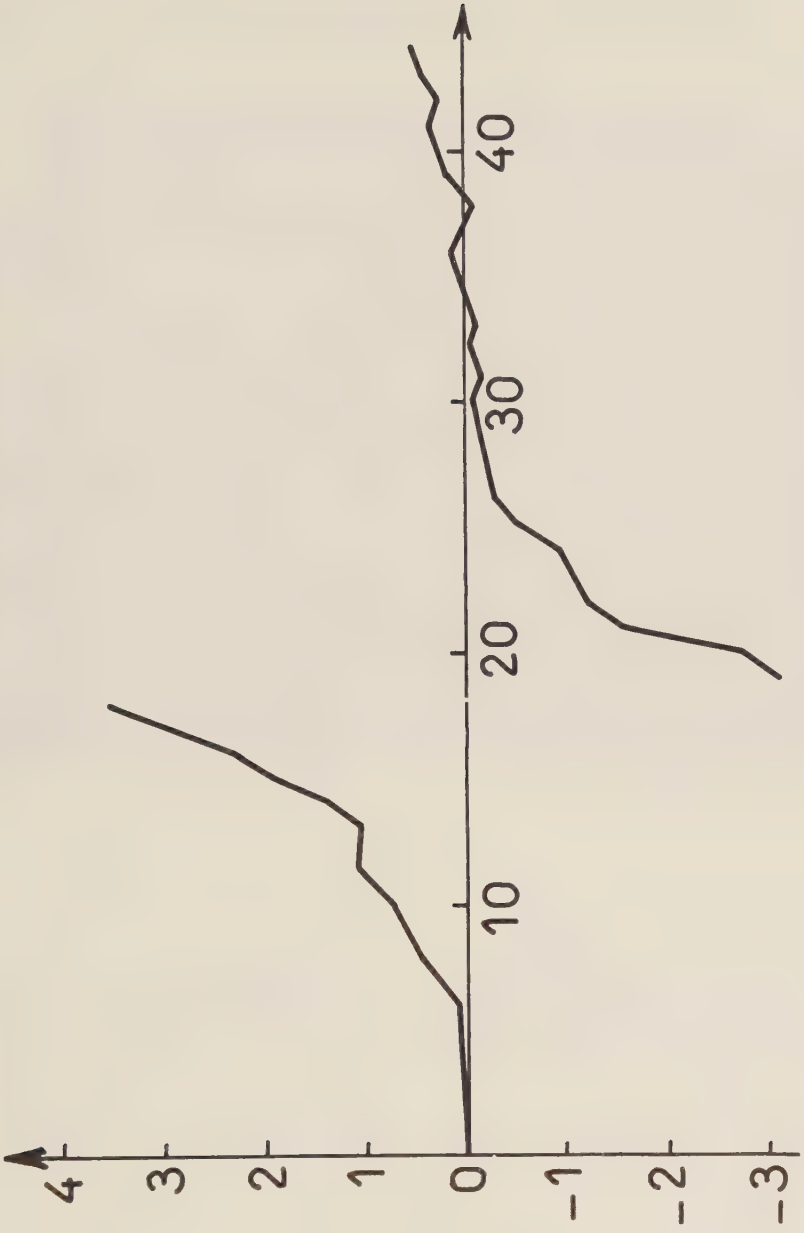
La vitesse c et l'amortissement α n'ont pas été donnés pour les fréquences basses, car la vitesse à ces fréquences est telle que l'on décrit seulement une ou deux branches de la courbe: nos résultats n'auraient donc pas été suffisamment sûrs (Fig. 3 et 4). On pourrait évidemment déterminer ces paramètres aux basses fréquences en utilisant des éprouvettes plus longues, qui feraient apparaître d'autres branches de courbe.

Certaines de nos éprouvettes contenaient des poches d'air par suite d'une fabrication défectueuse: nous avons constaté que la méthode permet de déceler ces défauts, car la courbe expérimentale $\mathrm{th}\alpha x \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} x$ change d'allure aux environs des poches d'air (fig. 7).

Les expériences ont été faites à la température de 18°, celle-ci ayant été contrôlée par des thermocouples dont nous avons parlé au chapitre I.

Nous avons complété nos mesures avec M. Wehr (de l'Institut des Problèmes fondamentaux de la Technique de Varsovie). D'une part, des mesures sur tous les barreaux de bitume ont été faites à la température de 28° C à la fréquence de 2 000 Hz (Tableau III). D'autre part, nous avons essayé de savoir s'il était possible d'appliquer la méthode à des ondes de torsion: nous avions pensé les produire en faisant subir au graveur et au récepteur une rotation de 90°.

En fait, l'expérience a montré que cette façon de procéder produisait des ondes de flexion: celles-ci ont d'ailleurs été décelées de deux façons différentes.



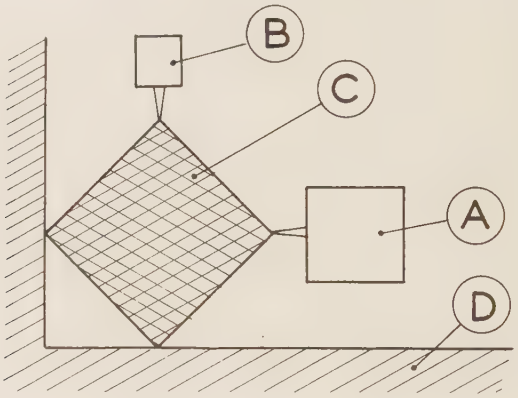
Fréquence 3 000 Hz (bitume 15% + sable 8mm + poches d'air)

5

1°) la courbe expérimentale tg $(\theta_o - \theta_n)$ était très imprécise, les phases étant très difficilement mesurables;

2°) le pick-up posé verticalement sur une face adjacente de la face excitée décelait à l'oscillographe une vibration.

Nous avons tourné la difficulté en obligeant le barreau à vibrer en torsion. Pour obtenir ce résultat, on a disposé le barreau comme l'indique le schéma ci-dessous.



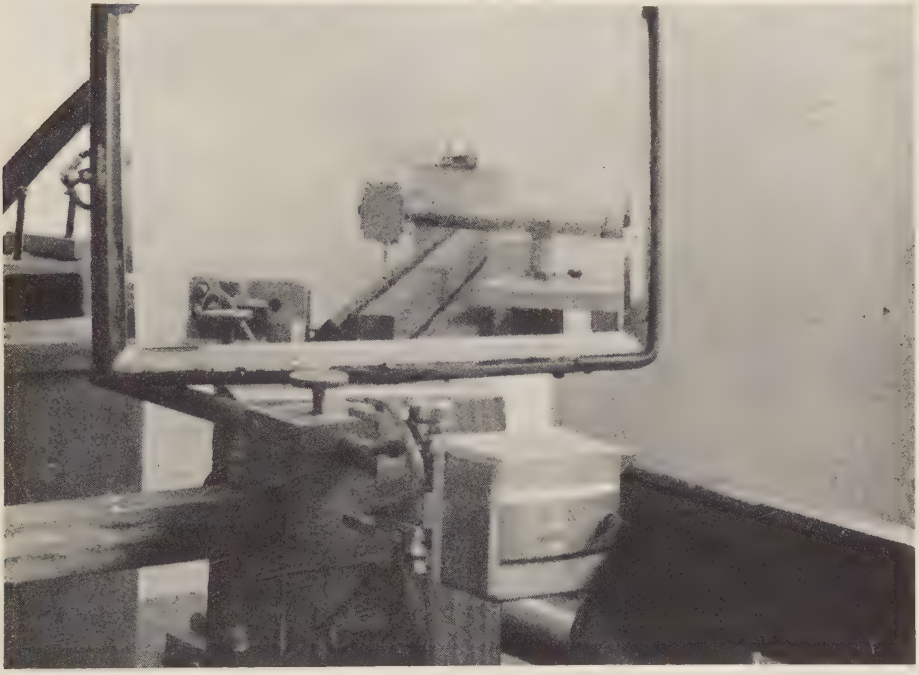
A - graveur

B - récepteur

C - barreau

D - support.

La figure 8 nous donne la photographie de ce montage.



- Figure 8 -

Le Tableau III donne les valeurs respectives des vitesses des ondes longitudinales et des ondes de torsion à la température de 28° C. On remarque que le rapport C_L/C_T reste constant pour tous les barreaux, ce qui montre que ν coefficient de Poisson garde la même valeur pour tous les barreaux essayés.

- TABLEAU III -

FREQUENCE 2 000 Hz TEMPERATURE 28°C

Matériaux	VITESSES EN m/s		Rapport C_L / C_T
	Ondes longitudinales C_L	Ondes transversales C_T	
Bitume pur	460	275	1,67
Bitume 80%	490	285	1,72
Bitume 50%	600	350	1,67
Bitume 25%	1 060	610	1,74
Bitume 15%	1 440	860	1,66
Bitume 13%	1 600	960	1,66

Il peut sembler a priori étonnant que le graveur dont la pointe gratte sur une des faces latérales du barreau, parallèlement au grand axe de celui-ci, n'engendre pas de vibrations autres que des vibrations longitidunales.

Proposons-nous donc d'examiner les vibrations susceptibles de se propager dans notre éprouvette. Les dimensions de celle-ci (50 cm de long, 1 cm^2 de section) sont telles que la théorie des verges minces doit fournir à tout le moins une excellente première approximation pour décrire ce qui se passe; par conséquent, on peut considérer que chaque section droite est animée de trois mouvements qui se superposent sans interaction: une vibration parallèlement à la fibre neutre (oscillation d'extension); une vibration dans le plan de la section au repos, dans une direction perpendiculaire à la fibre neutre (oscillation de flexion); une vibration autour de la fibre neutre (oscillation de torsion). Si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \end{pmatrix}$ est le vecteur déplacement du centre de la section (rapporté à des coordonnées cylindriques v, θ, z l'axe $0z$ coïncidant avec la direction de la fibre neutre au repos), le déplacement d'un point de la surface sera $\begin{pmatrix} u \\ r \\ \omega \end{pmatrix}$, r rayon vecteur du point. Il en résulte que si l'excitation consiste à imposer à ce point un mouvement parallèle à la fibre neutre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$ il ne se propagera dans le barreau que des oscillations d'extension (ou longitudinales) ainsi que, éventuellement ceux des modes propres de flexion et de torsion qui présenteraient un nœud sur la section excitée. En déplaçant au besoin le graveur d'excitation en avant ou en arrière, on pourra éviter de se trouver sur un tel nœud, et les vibrations qui se propagent seront purement longitudinales. On pourra de même n'exciter que des vibrations de torsion si l'on excite le barreau le long d'une section droite; mais il faudra alors veiller à permettre l'oscillation de celle-ci, en ne la fixant que par un point autour duquel elle pourra tourner et non tout le long d'une arête: c'est ce que nous avons fait en laissant reposer l'éprouvette le long d'une arête.

La fixation d'un point de la section droite excitée élimine en même temps toutes les vibrations de flexion qui n'auraient pas un nœud en cette section, et inversement en faisant reposer le barreau sur une de ses faces, on interdit avec le mode d'excitation considéré, les oscillations de torsion, mais on laisse libres de se produire les vibrations de flexion. Ainsi, en faisant successivement reposer le barreau sur une de ses faces ou sur une arête longitudinale, et en l'excitant par le graveur parallèlement ou perpendiculairement à la fibre neutre, on sépare les trois classes de vibrations possibles, et l'on est assuré de n'en laisser propager qu'une seule.

CONCLUSION

Nous avons vu que la vitesse de propagation c d'une onde progressive et son coefficient d'amortissement α, dans un matériau donné, étaient liés étroitement au module de complaisance complexe J, qui joue un si grand rôle dans la rhéologie dynamique. La détermination de ces deux paramètres permet donc de connaître le comportement des matériaux viscoélastiques: c'est pourquoi nous avons porté nos efforts sur la mise au point d'une méthode pour déterminer c et α avec une précision satisfaisante et avons illustré cette méthode en l'appliquant d'une part à un élastomère tel que le caoutchouc vulcanisé, d'autre part à des mastics bitumineux.

Le champ d'expérimentation a été malheureusement limité à quelques matériaux, car ceux-ci sont difficiles à fabriquer en laboratoire et demandent de grands moyens. Nous avons choisi comme méthode de mesure une méthode de phase: il est vrai que son utilisation exige beaucoup de minutie et des calculs un peu longs, mais en revanche elle est très précise, surtout dans le cas où l'amortissement α est grand. Or, dans ce cas, les méthodes connues sont en défaut, de sorte que l'utilité de la méthode de phase devient incontestable.

La méthode n'a cependant pas un domaine d'application illimité: elle exigerait des éprouvettes trop longues pour être pratiquement réalisables, aux fréquences très basses; et sa précision devient insuffisante pour des fréquences trop aiguës.

Résumons cette méthode des phases pour en examiner la portée d'un point de vue qui n'a pas été abordé dans les chapitres précédents.

On prend les moyens que l'on croit propres à établir dans une éprouvette prismatique, des ondes élastiques longitudinales formant un système stationnaire; on trace, en fonction de l'abscisse le long de l'éprouvette, la courbe des phases de la vibration: si cette courbe a l'allure de

la figure (1. introduction) avec une approximation raisonnable, on en conclut que le déplacement est régi par la formule :

$$y = e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

et l'on calcule la vitesse de propagation et l'amortissement comme il a été expliqué. De ces deux paramètres mesurés pour un nombre convenable de fréquences, on déduit les constantes de la relation d'état entre la contrainte et la déformation dans le matériau.

Il faut se poser quelques questions inverses:

1°) Tout d'abord, est-il licite de conclure, de l'obtention expérimentale de la courbe tg $(\theta_o - \theta_n)$, à la validité de la formule:

$$v = e^{-\alpha x + i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Nous pouvons écrire celle-ci sous la forme

$$y = \cos k x \operatorname{ch} \alpha x + i \sin k x \operatorname{ch} \alpha x = \cos (k + i\alpha) x$$

d'où l'équation différentielle:

$$* \qquad y'' + \frac{\omega^2}{V^2} y = 0$$

V désignant la vitesse complexe de propagation:

$$V = \frac{\omega}{k + i\alpha}$$

Si l'éprouvette était hétérogène (densité ρ et vitesse V fonctions de x), l'équation différentielle serait:

$$** \qquad y'' + \frac{(\rho V^2)'}{\rho V^2} y' + \frac{\omega^2}{V^2} y = 0$$

où rappelons-le, ρV^2 est égal à la fonction des coefficients de Lamé $\lambda + 2\mu$. Cette équation peut-elle avoir une solution qui s'accomode de la formule des phases

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p_i y}{p_r y} = \operatorname{tg} kx \operatorname{th} \alpha x$$

c'est à dire, une solution de la forme

$$y = \varphi(x) \cos (k + i\alpha) x,$$

où φ est une fonction à valeurs réelles?

L'identification dans (* *) donne

$$\begin{cases} \dfrac{2\varphi'}{\varphi} = -\dfrac{(\rho v^2)'}{\rho v^2} \\ \varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \left[\dfrac{\omega^2}{v^2} - (k+i\alpha)^2\right]\varphi^2 = 0 \end{cases}$$

La première de ces conditions s'intègre immédiatement et donne

$$\varphi^2 = C/\rho v^2$$

la deuxième donne alors, en posant pour alléger l'écriture $\rho v^2 = f(x)$

$$\rho(x) = \frac{1}{\omega^2}\left[f'' - \frac{f'^2}{2f} + (k+i\alpha)^2 f\right]$$

Autrement dit, il faut, pour que l'hypothèse soit vérifiée, que les variations de ρ (x) et de v (x) soient liées par une relation assez particulière. On peut en conclure que si l'expérience donne pour courbe des phases une courbe qui coïncide pratiquement avec celle de la figure (1), il y a une probabilité très forte pour que (y) soit vérifiée.

2°) On peut aller plus loin, en envisageant le cas où l'on obtiendrait une courbe ayant l'allure de la figure (1) déformée par anamorphose des abscisses, par exemple avec des zéros et asymptotes non équidistants. Ce cas présente un intérêt pratique, car nous l'avons rencontré dans une étude de caoutchouc synthétique que nous nous proposons de continuer.

La nouvelle question posée est celle-ci:

(* *) peut-elle admettre une solution de la forme:

$$y = \varphi(x)\cos q\psi(x) \qquad q \equiv k+i\alpha$$

moyennant un choix convenable des deux fonctions φ et ψ (cette dernière définissant l'anamorphose des abscisses)?.

L'identification conduit ici aux exigences suivantes:

$$\begin{cases} \psi'' + \left[\dfrac{f'}{f} + \dfrac{2\varphi'}{\varphi}\right]\psi = 0 \\ \varphi'' + \dfrac{f'}{f}\varphi' + \left[\dfrac{\rho\omega^2}{f} - q^2\psi'^2\right]\varphi = 0 \end{cases}$$

dont la première s'intègre immédiatement en donnant

$$\Psi' = \frac{C}{f \varphi^2}$$

d'où pour φ l'équation différentielle

$$\varphi'' + \frac{f'}{f} \varphi' + \frac{f\omega^2 \varphi}{f} - \frac{q^2 c^2}{f^2 \varphi^3} = 0$$

Quelles que soient les caractéristiques d'hétérogénéités ρ (x) et f (x) c'est à dire v (x) on peut donc espérer avoir des solutions acceptables pour Ψ et φ. Pratiquement, les zéros successifs x_n de la courbe expérimentale des phases donneront $k \Psi (x_n) = n\pi$,
d'où

$$\Psi(x_{n+1}) = \frac{n+1}{n} \Psi(x_n)$$

donc un moyen d'évaluer grossièrement Ψ; l'amplitude φ peut elle aussi être tirée de la courbe expérimentale (comme on l'avait fait pour α dans le cas de la courbe théorique simple), et par conséquent on aura une idée des caractéristiques d'hétérogénéité ρ (x) et v (x).

Nous croyons que ces considérations, encore peu concrètes, pourraient être précisées par l'étude de quelques matériaux hétérogènes, et qu'elles permettent d'envisager une extension de la méthode des phases à des cas moins simples que ceux que nous avons traités dans le présent travail.

BIBLIOGRAPHIE

Alfrey (T.) Jr. - Mechanical Behavior of high Polymers,
New York, 1948, Interscience Publishers.

Alfrey (T.) Jr & Gurnee (E. F.) - Dynamics of viscoelastic Behavior, in "Rheology, Vol. I : Theory and applications, edited by Eirich (F. R.)",
New York, 1956, Acad. Press.

Bismuth (W.) - Propagation et amortissement d'ondes progressives dans le caoutchouc étiré,
3ème Congrès International d'Acoustique, Stuttgart, 1959, edited by Cremer (L.), Amsterdam, 1961, Elsevier Publishing C°.

Bismuth (W.) - Etude du comportement viscoélastique du caoutchouc,
10ème Congrès International de Mécanique Appliquée, Stresa, 1960. Sous presse.

Bismuth (W.) - Propagation des vibrations dans des mélanges bitumineux
Colloques Internationaux du C. N. R. S., n°111, 1961, Sous presse.

Davids (N.) - Editeur - International Symposium on Stress Wave Propagation in Materials,
New York, 1960, Interscience Publishers.

Gross (B.) - Mathematical Structure of the theories of viscoelasticity,
Paris, 1953, Herman.

Hillier (K. W.) & Kolsky (H.) - Proc. phys. Soc., G. B., 62, 4, 1949, p. 111

Hunter (S. C.) - Viscoelastic Waves,
Progress in solid Mechanics, Vol. I, edited by Sneddon
(I. N.) & Hill (R.),
Amsterdam, 1960, North-Holland Publisching C°.

Kolsky (H.) - Stress Waves in Solid.
Oxford, 1953, at the Clarendon Press.

Treolar (L. R. G.) - The Physics of Rubber Elasticity (2nd Edition),
Oxford, 1958, at the Clarendon Press.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Avant-propos	5
INTRODUCTION	7
1. Objet du travail	7
2. Equation d'état des corps visco-élastiques linéaires	8
3. Modèles mécaniques	12
4. Propagation d'un ébranlement dans un corps visco-élastique	16
5. Conclusions	20
CHAPITRE I	23
Propagation d'ondes progressives dans le caoutchouc étiré	23
1. Choix d'une méthode	23
2. Théorie de la méthode	25
3. Méthode expérimentale	28
CHAPITRE II	37
Résultats expérimentaux	37
CHAPITRE III	47
Propagation d'ondes progressives dans le bitume	47
- Principe de la méthode	47
- Appareillage	48
CONCLUSION	61
BIBLIOGRAPHIE	65

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

QUELQUES APPLICATIONS DE LA RESONNANCE MAGNETIQUE NUCLEAIRE

Vu et approuvé:
Le Doyen de la Faculté des Sciences

P. ROUARD

Vu
Les Membres du Jury:

MM. P. ROUARD, Président,
R. MERIGOUX
P. BOUSQUET
G. CHAMPETIER
Th. VOGEL

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille ,
J. BLACHE,
7 mai 1962 .

IMP. LOUIS-JEAN – GAP

Dépôt légal n° 124 – 1962